1. Amanecer

La historia guarda el nombre de los bastardos reales,
pero no puede decirnos cuál es el origen del trigo

JEAN HENRI FABRE (1823-1915)

Han pasado alrededor de un millón de años desde que apareció sobre este planeta el animal llamado hombre, con su capacidad de manejar herramientas. Durante ese tiempo percibió las diferencias de forma y sentido, entendió los conceptos de magnitud y número, aprendió a medir y advirtió que existe una relación entre ciertas magnitudes.

Los detalles de este proceso no se conocen. El primer destello de luz en la oscuridad viene de la edad de piedra: el hueso de un lobo con marcas utilizado a modo de tarja. Los destellos se vuelven más brillantes y numerosos a medida que pasa el tiempo, pero no es sino hasta el 2000 a. C. que los hechos comienzan a establecerse a través de documentación directa en vez de evidencia circunstancial. Y uno de estos hechos es el siguiente: alrededor del año 2000 a. C., los seres humanos habían comprendido la importancia de la constante que hoy en día representamos con el símbolo π y habían encontrado una tosca aproximación a su valor real.

¿Cómo llegaron hasta ese punto? Para responder a esta pregunta, debemos regresar a la edad de piedra y aún más allá, y adentrarnos en el reino de la especulación. Mucho antes de la invención de la rueda, el hombre debe haber identificado la forma peculiarmente regular del círculo. La veía en los ojos de los demás hombres y animales; la veía en los discos del Sol y la Luna; la veía, o veía algo muy parecido, en algunas flores; y tal vez le agradaba su infinita simetría al dibujar esta forma en la arena con un palito.

Podría especularse que en ese momento el hombre comenzó a entender el concepto de magnitud: había círculos grandes y círculos pequeños, árboles altos y árboles bajos, piedras pesadas, piedras más pesadas, piedras muy pesadas. El paso de estas estimaciones cualitativas a mediciones cuantitativas constituye el amanecer de las matemáticas. Debe haber sido un camino largo y tortuoso, pero parece correcto suponer que esto se dio en primer lugar para cantidades que sólo toman valores enteros: personas, animales, árboles, rocas, palitos. Pues contar es una medición cuantitativa: la medición de la cantidad de una multitud de elementos.

En primer lugar el hombre aprendió a contar hasta dos, y mucho tiempo pasó hasta que aprendió a contar hasta números más grandes.

1. Dantzig.

La evidencia a favor de esta idea es abundante,[1] y quizá la más fascinante es la que se conserva en los idiomas: hasta la edad media, existían dos formas del plural en checo: una para dos elementos y otra para más de dos, y al parecer esta característica se conserva en el finlandés hasta el día de hoy. Claramente no hay conexión entre las palabras germánicas *two* ("dos") y *half* ("mitad"); tampoco en los idiomas latinos (en castellano *dos* y *mitad*, en francés *deux* y *moitié*) ni en los idiomas eslavos (ruso: *dva* y *pol*), y en el húngaro, que no es un idioma indoeuropeo, las palabras son *kettö* y *fél*. Sin embargo en todos los idiomas europeos están relacionadas las palabras para 3 y 1/3, 4 y 1/4, etcétera. Esto sugiere que los hombres comprendieron el concepto de fracción y la idea de la relación entre un número y su recíproco sólo después de haber aprendido a contar hasta más de dos.

El próximo paso fue descubrir las relaciones entre distintas magnitudes. Una vez más, parece seguro que dichas relaciones se expresaron primero de forma cualitativa. Probablemente los hombres notaron que las piedras más grandes son más pesadas, o para decirlo en una forma más complicada, que existe una relación entre el peso y el volumen de una piedra. También se debe de haber notado que un árbol más viejo es más alto, que un corredor más rápido recorre una mayor distancia, que de una mayor presa se obtiene más comida, que campos más extensos dan un mayor cultivo. Entre todo este tipo de relaciones, había una que difícilmente podría no haber sido descubierta y que, aún más, no tenía excepciones: mientras más "ancho" es un círculo, más largo es su contorno.

Y una vez más, a este razonamiento cualitativo deben de haberle seguido consideraciones cuantitativas. Si el volumen de la piedra se duplica, el peso se duplica; si corres el doble de rápido, recorres el doble de distancia; si se triplican los campos, se triplica el cultivo; si se duplica el diámetro de un círculo, se duplica su circunferencia. Por supuesto, la regla no siempre funciona: un árbol el doble de viejo no es necesariamente el doble de alto. La razón es que la regla "a más de esto, más de lo otro" no implica siempre que ambas cosas sean proporcionales, o, para decirlo en forma más esnob, no toda función monótona es lineal.

Al hombre neolítico le interesaban muy poco las funciones monótonas; pero sin duda el hombre descubrió, consciente o inconscientemente, por experiencia, instinto, razonamiento o todo lo anterior, el concepto de proporcionalidad, es decir, aprendió a identificar pares de magnitudes tales que si una era duplicada, triplicada, cuadruplicada, dividida en dos o se mantenía constante, la otra también se duplicaría, triplicaría, cuadruplicaría, dividiría por dos o no mostraría cambio alguno.

Y entonces llegó el gran descubrimiento. Poco se logra con reconocer ciertas propiedades y definirlas (es por esto que, por ejemplo, el viejo método de la biología descriptiva era tan estéril). Pero cuando las observaciones se generalizan de forma tal que puede establecerse una regla general válida, estamos frente a un gran descubrimiento científico. Cuanto mayor alcance tenga, mayor es su importancia. La afirmación de que un campo de cultivo alimentará a la mitad de la tribu, dos campos a toda la tribu, tres campos a una tribu y media, sólo se aplica a ciertos cultivos y a ciertas tribus. Que una abeja tiene 6 patas, tres abejas tienen 18, etcétera, es una afirmación que, en el mejor de los casos, se aplica a la clase de los insectos. Pero en medio de todos estos razonamientos algunos individuos inteligentes y perspicaces deben de haber notado algo en común en el comportamiento de las magnitudes en estas afirmaciones y otras similares: sin importar cómo varíen dos cantidades proporcionales, su razón se mantiene constante.

Para los campos de cultivo, esta constante es $1:1/2=2:1=3:1\ 1/2=2$. Para las abejas es $1:6=3:18=1/6$. Y así el hombre descubrió una verdad no específica, sino general.

Esta razón constante no fue descubierta por división numérica (y ciertamente no a través del uso de los números arábigos, como se hizo más arriba); probablemente la razón fuera expresada en forma geométrica, pues la geometría fue la primera disciplina matemática en la que se hicieron progresos importantes. Pero la técnica efectivamente utilizada para descubrir la constancia de razón entre dos cantidades proporcionales es poco relevante para el argumento.

Hubo, por supuesto, muchos pasos intermedios, tales como el descubrimiento de las sumas, diferencias, productos y divisiones, y el paso de la abstracción, ejemplificado por la transición de decir "dos pájaros y dos pájaros son en total cuatro pájaros" a decir "dos y dos son cuatro". Pero el paso decisivo e indispensable camino a π fue el descubrimiento de que las cantidades proporcionales tienen una razón (proporción) constante.

Desde ese punto hasta la constante π la distancia era un paso diminuto: si el "contorno" (la circunferencia) y el "ancho" (diámetro) de un círculo eran reconocidos como cantidades proporcionales, lo que era fácil de observar, entonces se sigue que la razón

circunferencia : diámetro = constante para todos los círculos.

Esta razón constante del círculo no fue denotada con el símbolo π sino hasta el siglo XVIII d. C., ni, por otro lado, se generalizó el uso del signo de igualdad (=) antes del siglo XVI d. C. (las líneas gemelas como signo igual fueron utilizadas por el físico y matemático inglés Robert Recorde en 1557 con la encantadora explicación de que "no hay dos cosas que sean más iguales"). Sin embargo, nosotros emplearemos la notación moderna desde el principio, por lo que la definición de π es

$$\pi = \frac{C}{D}, \tag{1}$$

donde C es la circunferencia y D el diámetro del círculo.

Y así, nuestro viaje especulativo ha llegado a alrededor del 2000 a. C., al amanecer de la historia documentada de las matemáticas. Por los documentos de aquella época resulta claro que tanto los babilonios como los egipcios (y quizás algunos otros) eran conscientes de la existencia y la importancia de la constante π definida por la ecuación (1).

Pero los babilonios y los egipcios conocían más acerca de π que su mera existencia. Habían descubierto también valores aproximados. Alrededor del año 2000 a. C., los babilonios habían llegado al valor

$$\pi = 3\ 1/8 \tag{2}$$

y los egipcios al valor

$$\pi = 4\,(8/9)^2. \tag{3}$$

¿Cómo llegó esta gente de la antigüedad a esos valores? Nadie lo sabe con certeza, pero en este caso no es difícil de adivinar.

Obviamente, la forma más fácil es dibujar un círculo, medir su circunferencia y su diámetro, y encontrar π como la razón de ambas cantidades. Tratemos de hacer esto, imaginando que estamos en Egipto en el 3000 a. C. No hay una Oficina Internacional de Pesos y Medidas, no hay cintas de medir calibradas. No podemos utilizar el sistema decimal ni ningún tipo de división numérica. No hay compases, no hay lápiz, no hay papel: lo único que tenemos son estacas, cuerdas y arena.

Por lo tanto buscamos una extensión de arena húmeda aceptablemente plana a orillas del Nilo, clavamos una estaca, amarramos a ella una cuerda, y en el otro extremo de la cuerda anudamos otra estaca con punta afilada. Manteniendo tensa la cuerda, dibujamos un círculo en la arena. Sacamos nuestra estaca central, dejando un agujero O en el centro del círculo (véase la figura 1). Ahora tomamos un pedazo de cuerda más largo, elegimos un punto A sobre el círculo y estiramos la cuerda desde A, pasando por O, hasta que interseque el otro lado del círculo en el punto B. Colocamos una marca en el largo AB de la cuerda (con carboncillo): éste es el diámetro de nuestro círculo y nuestra unidad de medida. Ahora tomamos la cuerda y con ella rodeamos la circunferencia de nuestro círculo, empezando en A. La marca de carboncillo está en C, y hemos recorrido "un diámetro" de distancia sobre la circunferencia. Luego repetimos la operación desde C y llegamos hasta D, y otra vez desde D hasta E, de modo que el diámetro quepa en la circunferencia tres veces (y un poquito más).

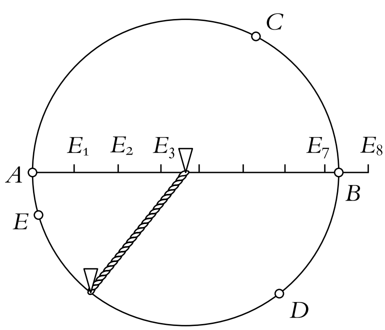

FIGURA 1. Cómo medir π en las arenas del Nilo.

Si, para empezar, nos olvidamos de ese poquito, sabemos que, redondeado al número entero más cercano,

$$\pi = 3. \tag{4}$$

Para mejorar nuestra aproximación, a continuación medimos el pequeño resto EA como fracción de nuestra unidad de medida, AB.

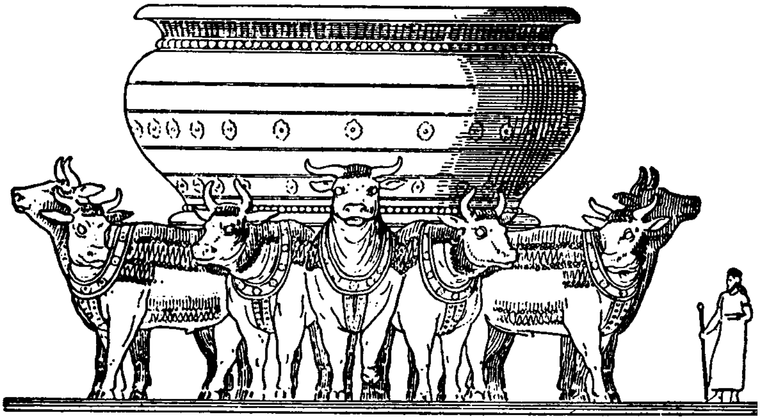

FIGURA 2. El mar de metal fundido reconstruido por Gressman según la descripción de II Reyes.

Medimos el largo de la curva *EA* y lo señalamos con carboncillo en otra cuerda. Luego estiramos esta cuerda a lo largo de *AB* y nos fijamos cuantas veces "entra" en esta distancia: entre 7 y 8 veces. (En realidad, haciendo un poco de trampa comparando nuestro resultado con la aritmética del siglo XX, descubrimos que 7 es un valor mucho más cercano que 8, es decir, que el punto E_7 de la figura está más cerca de *B* que E_8, pues $1/7=0.142857\ldots$ y $1/8=0.125$, y el primero está más cerca del valor correcto de $\pi-3=0.141592\ldots$ Sin embargo, esto sería difícil de observar en nuestra medición en la que usamos cuerdas gruesas y elásticas, con marcas de carboncillo bastante toscas hechas sobre una curva aproximadamente circular dibujada sobre una región considerada "plana" por una opinión arbitraria.)

Así hemos encontrado que el largo del arco *EA* está entre 1/7 y 1/8 del valor de *AB*; y por tanto nuestra siguiente aproximación es

$$3\ 1/8<\pi<3\ 1/7 \tag{5}$$

porque esto es la cantidad de veces que la longitud de soga *AB* cabe en la circunferencia *ACDE,* redondeada a la fracción simple más cercana.

Y de hecho, los valores

$$\pi=3,\ \pi=3\ 1/7,\ \pi=3\ 1/8$$

son los que encontramos más comúnmente en la antigüedad.

Por ejemplo, en el Antiguo Testamento (I Reyes 7:23 y II Crónicas 4:2) encontramos el siguiente versículo:

> Luego hizo un mar de metal fundido de diez codos de borde a borde; era perfectamente redondo, de cinco codos de altura, y un hilo de treinta codos medía su circunferencia.

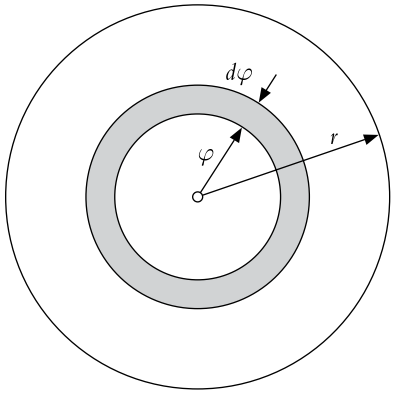

FIGURA 3. Determinación del área de un círculo utilizando el cálculo integral. La superficie de una región en forma de anillo es $dA=2\pi\varphi d\varphi$; por tanto el área del círculo es $A=2\pi\int_0^r\varphi d\varphi=\pi r^2$.

El mar de metal fundido, según afirma el autor, es circular; mide 30 codos de contorno (circunferencia) y 10 codos de borde a borde (diámetro); así, el valor bíblico para π es $30/10=3$.

El Libro de los Reyes fue editado por los antiguos judíos como escrito religioso alrededor del 550 a. C., pero sus fuentes datan de varios siglos antes. En ese momento, π ya era conocido con una precisión considerablemente mayor, pero claramente no para los editores de la Biblia. El Talmud judío, que es esencialmente un comentario del Antiguo Testamento, fue publicado en el 500 d. C. Aún en esta tardía fecha afirma que "aquello que en circunferencia es de tres brazas de largo tiene una braza de ancho".

Durante la antigüedad temprana, en Egipto y en otros lugares, los sacerdotes solían tener una relación estrecha con las matemáticas (como custodios del calendario, y por otras razones que veremos más adelante). Pero a medida que se desarrolló el proceso de especialización, la ciencia y la religión comenzaron a separarse. En la época en que se editó el Antiguo Testamento, ambas ya estaban completamente separadas. La falta de exactitud del valor bíblico de π no es, por cierto, más que una curiosidad interesante. Sin embargo, con la ventaja de conocer los hechos que siguieron, es conveniente notar esta pequeña piedra en el camino que llevó a la confrontación entre ciencia y religión —la cual muchas veces degeneró en un conflicto abierto—, acerca de la cual hablaremos más adelante.

Volviendo a la determinación de π por medición directa utilizando instrumentos primitivos, probablemente se pueda afirmar que no llevó a valores más precisos que (5).

De ahora en adelante, el hombre dependía de su ingenio más que de cuerdas y estacas en la arena. Y fue a través de su ingenio, más que de mediciones experimentales, que descubrió el valor del área del círculo.

Los antiguos también conocían las reglas para calcular el área de un círculo. Una vez más, dado que no sabemos cómo las descubrieron (excepto por un método utilizado en Egipto, que será descrito en el próximo capítulo), para tener alguna idea debemos jugar de nuevo el juego de "cómo hacerlo con el conocimiento de aquellos tiempos". El área de un círculo es

$$A=\pi r^2, \tag{6}$$

donde r es el radio del círculo. Esta fórmula nos la enseñaron a la mayoría en la escuela; el profesor decía que era cierta, y había que aceptarla y aprenderla de memoria; esta fórmula es, de hecho, un ejemplo de la

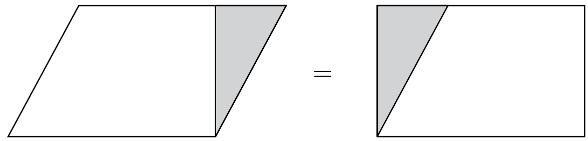

FIGURA 4. El paralelogramo y el rectángulo tienen áreas iguales, como puede verse cortando el triángulo sombreado en la imagen y reacomodándolo como se indica.

brutalidad con la que la matemática suele enseñarse a los inocentes. Quienes más tarde toman un curso de cálculo integral descubren que la demostración de (6) es muy sencilla (véase la figura 3). ¿Pero cómo calculaba la gente el área del círculo unos cinco milenios antes de que se inventara el cálculo integral?

Probablemente utilizando un método de reordenamiento. Los antiguos calculaban el área de un rectángulo como base por altura. Para calcular el área de un paralelogramo, construían un rectángulo de igual área reacomodando las piezas como en la figura 4, y así descubrieron que el área de un paralelogramo también se obtenía multiplicando base por altura. La era del rigor, que llegó más tarde con los griegos, estaba todavía lejos; no era necesario saber de la congruencia de triángulos para convencerse de la validez "obvia" del reordenamiento.

Tratemos, pues, de utilizar la idea general del reordenamiento de piezas como en la figura 5 para tratar de convertir un círculo en un paralelogramo de área igual. Seguimos utilizando palitos para dibujar en la arena, pero esta vez es sólo para ayudar a nuestra imaginación, no para realizar una verdadera medición.

Primero cortamos el círculo en cuatro cuadrantes como se ve en la figura 5*a*, y los reordenamos como se muestra en la figura 5*b*. A continuación llenamos los espacios entre los segmentos con otros cuatro

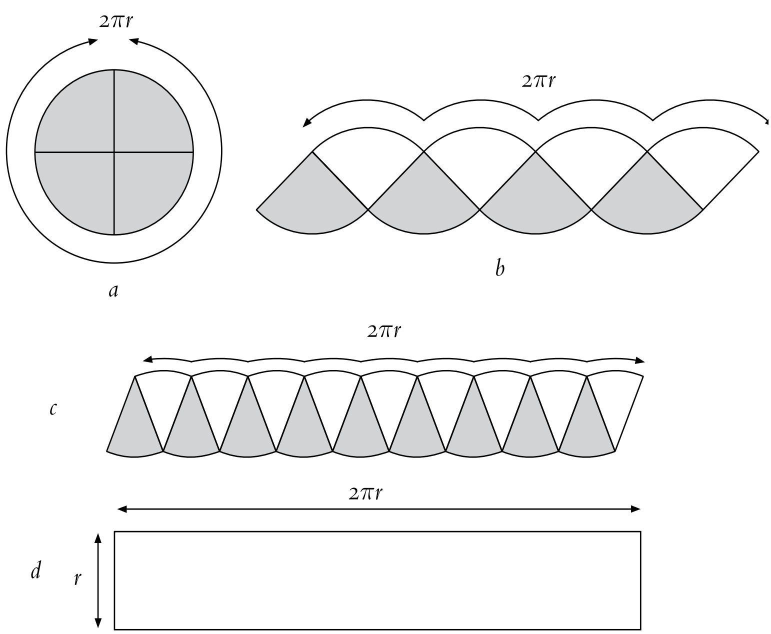

FIGURA 5. Determinación del área de un círculo por reordenamiento. Las áreas de las figuras *b, c* y *d* son iguales exactamente al doble del área del círculo de *a*.

Figura 6. El método de reordenamiento utilizado en un documento japonés del siglo XVII.

cuadrantes del mismo tamaño. El contorno de la extraña figura resultante tiene un vago parecido con la forma de un paralelogramo. El ancho de la figura, medido a lo largo de los arcos circulares, es igual a la circunferencia del círculo original, o sea $2\pi r$. Lo único que podemos decir con seguridad es que el área de la figura es exactamente el doble del área del círculo original.

Si ahora dividimos el círculo, no en cuatro, sino en muchos segmentos, nuestro cuasi-paralelogramo se parecerá mucho más a un rectángulo, y el área del círculo sigue siendo exactamente la mitad del cuasi-paralelogramo (c).

Si continuamos este proceso de cortar el círculo original en un número cada vez mayor de segmentos, el lado formado por los arcos de los pequeños segmentos se volverá indistinguible de una línea recta y nuestro cuasi-paralelogramo se volverá un paralelogramo de verdad (un rectángulo en este caso) con lados de longitud $2\pi r$ y r. Por tanto, el área del círculo es la mitad del área de este rectángulo, o sea πr^2.

Esta misma construcción puede observarse en el documento japonés (1698) mostrado en la figura 6. Leonardo da Vinci también utilizó este método en el siglo XVI. Leonardo no tuvo mucha instrucción matemática, y en cualquier caso, no le habría servido de mucho, pues la Europa de sus tiempos, debilitada por más de un milenio de existencia del imperio romano y la iglesia romana, estaba en un nivel matemático muy cercano al alcanzado en la antigua Mesopotamia. Por tanto, es muy probable que éste haya sido el método con el que los pueblos antiguos descubrieron el valor del área de un círculo.

Y ésta será nuestra última especulación. De ahora en adelante, podemos apoyarnos en los registros históricos.