

Prefacio

Debe haber sido a la edad de nueve o diez años cuando encontré el número π por primera vez. Mi padre tenía un amigo que era dueño de un taller, y un día me invitó a visitar el lugar. La habitación estaba llena de herramientas y máquinas, y un denso olor a aceite flotaba sobre el lugar. La maquinaria nunca me había interesado particularmente, y el dueño tiene que haber notado mi aburrimiento cuando me llevó al costado de una gran máquina que tenía unidos varios volantes y discos. Me explicó que, independientemente de qué tan grande o chico sea un disco, hay siempre una misma razón entre su circunferencia y su diámetro, y que esta razón es un número cercano a $3 \frac{1}{7}$, o sea $\frac{22}{7}$. Quedé cautivado por este extraño número y mi asombro aumentó cuando mi anfitrión agregó que todavía nadie había escrito este número con total exactitud —uno sólo puede aproximarlo—. Tan importante es este número que se le ha dado un símbolo especial, la letra griega π . ¿Por qué —me pregunté a mí mismo— una forma geométrica tan simple como un círculo tiene asociado un número tan extraño como éste? No sabía que el mismo número había intrigado a los científicos por casi cuatro mil años y que varias preguntas sobre él no se han contestado hasta el día de hoy.

Varios años después, estudiando álgebra al comenzar la escuela secundaria, me intrigó un segundo número igualmente extraño. Los logaritmos eran una parte importante del plan de estudio, y en aquellos días —mucho antes de la aparición de las calculadoras manuales— el uso de las tablas de logaritmos era una necesidad para cualquier persona que deseara estudiar matemáticas superiores. ¡Qué horrosas eran esas tablas, con sus cubiertas verdes, editadas por el Ministerio de Educación israelí! Te aburrías mortalmente haciendo cientos de ejercicios repetitivos y esperando que no te hubieras saltado una fila o mirado la columna equivocada. Los logaritmos que utilizábamos eran llamados “comunes” —utilizaban la base 10, lo cual es bastante natural—. Pero las tablas tenían también una página llamada “logaritmos naturales”. Cuando indagué cómo algo podía ser más “natural” que los logaritmos en base 10, mi profesor respondió que existía un número especial, denotado por la letra e y aproximadamente igual a 2.71828, que era utilizado como base en matemáticas “superiores”. ¿Por qué este extraño número? Tuve que esperar hasta el último año, cuando tomamos el curso de cálculo, para estudiarlo.

Mientras tanto, pensé que π tenía una especie de primo, y la comparación entre los dos me resultó inevitable, sobre todo porque sus valores son muy parecidos. Me llevó unos pocos años más de estudios

universitarios aprender que los dos primos estaban de verdad muy emparentados, y que su relación es la más misteriosa de todas por la presencia de un tercer símbolo, i , la célebre “unidad imaginaria”, la raíz cuadrada de -1 . Así, ahí estaban todos los elementos de un drama matemático a la espera de ser narrado.

La historia de π ha sido extensamente narrada, sin duda porque se remonta a épocas remotas pero también porque mucho puede ser comprendido sin el conocimiento de matemáticas avanzadas. Tal vez ningún libro pueda superar a *Historia de π* , de Petr Beckmann,[†] un modelo de divulgación popular, a la vez claro y preciso. Al número e le ha ido menos bien. No sólo es de una cosecha más reciente, sino que su historia está estrechamente relacionada con el cálculo, una materia que tradicionalmente es considerada la entrada a las matemáticas “superiores”. Hasta donde sé, todavía no ha aparecido un libro sobre la historia de e comparable al de Beckmann. Espero que el presente libro llene ese hueco.

Mi objetivo es contar la historia de e a un nivel accesible a lectores con un modesto conocimiento de matemáticas. He minimizado el uso de matemáticas en el texto en sí, relegando varias demostraciones y desarrollos a los apéndices. También me he permitido distraerme del tema principal en algunas ocasiones para explorar algunos asuntos laterales de interés histórico. Éstos incluyen reseñas biográficas de muchas de las figuras que desempeñaron algún papel en la historia de e , algunas de las cuales rara vez son mencionadas en los libros de texto. Sobre todo, quiero mostrar la gran variedad de fenómenos de distintos orígenes —desde la física y la biología hasta el arte y la música— que están relacionados con la función exponencial e^x , haciendo interesante este tema en campos bien alejados de la matemática.

En varios momentos me he apartado de la forma tradicional en que se presentan ciertos temas en los libros de texto de cálculo. Por ejemplo, al mostrar que la función $y=e^x$ es igual a su propia derivada, la mayoría de los libros derivan primero la fórmula $d(\ln x)/dx=1/x$, un largo proceso en sí mismo. Sólo entonces, tras invocar la regla de derivación de funciones inversas, se obtiene el resultado deseado. Siempre sentí que éste era un proceso largo e innecesario: uno puede derivar la fórmula $d(e^x)/dx=e^x$ directamente —y mucho más rápido— mostrando que en general la derivada de una función exponencial $y=b^x$ es proporcional a b^x y encontrando luego el valor de b para el cual la constante de proporcionalidad es igual a 1 (esta derivación se encuentra en el apéndice 4). Para la expresión $\cos x + i \operatorname{sen} x$, que aparece con frecuencia en matemáticas superiores, he utilizado la notación más concisa $\operatorname{cis} x$ con la esperanza de que esta notación mucho más corta se utilice más a menudo. Al considerar las analogías entre las funciones circulares e hiperbólicas, uno de los resultados más hermosos, descubierto alrededor de 1750 por Vincenzo Riccati, es que para ambas clases de funciones la variable independiente puede ser interpretada

[†] Véase Petr Beckmann, *Historia de π* (México, Librería-CNCA, 2006), en esta misma colección.

geoméricamente como un área, haciendo las similitudes formales entre ambos tipos de funciones aún más destacables. Este hecho —rara vez mencionado en los libros de texto— se discute en el capítulo 12 y otra vez en el apéndice 7.

En el curso de mis investigaciones, un hecho quedó inmediatamente claro: el número e era conocido por los matemáticos al menos medio siglo antes de la invención del cálculo (se refiere ya a él la traducción al inglés a cargo de Edward Wright de la obra de John Napier sobre los logaritmos, publicada en 1618). ¿Cómo pudo ocurrir esto? Una posible explicación es que el número e apareciera primero en conexión con la fórmula del interés compuesto. Alguien —no sabemos quién ni cuándo— tiene que haber notado el hecho curioso de que, dado un capital inicial C compuesto n veces al año a una tasa de interés anual r invertido durante t años, si se permite que n crezca indefinidamente, el monto final de dinero S , obtenido de la fórmula $S = C(1 + r/n)^{nt}$, parece aproximarse a un cierto límite. Este límite, para $C = 1$, $r = 1$ y $t = 1$, es casi 2.718. Este descubrimiento —más parecido a una observación experimental que al resultado de una deducción matemática rigurosa— debe haber sorprendido a los matemáticos de comienzos del siglo xvii, para los cuales el concepto de límite aún no era conocido. Así, el verdadero origen del número e y de la función exponencial bien puede encontrarse en un problema terrenal: la forma en que el dinero aumenta en el tiempo. Veremos, sin embargo, que otro problema —el área bajo la hipérbola $y = 1/x$ — conduce independientemente al mismo número, lo que deja el origen exacto de e cubierto de misterio. El papel mucho más familiar de e como la base “natural” de los logaritmos tuvo que esperar hasta que el trabajo de Leonhard Euler en la primera mitad del siglo xviii hizo de la función exponencial uno de los protagonistas del cálculo.

Hice todos los esfuerzos que pude para ofrecer nombres y fechas con la mayor precisión posible, si bien con frecuencia las fuentes dan información contradictoria, particularmente en la prioridad de ciertos descubrimientos. Los comienzos del siglo xvii fueron un periodo de actividad matemática sin precedentes, y a menudo distintos científicos, sin estar enterados del trabajo de los otros, desarrollaban ideas similares y arribaban a resultados similares casi a la vez. La costumbre de publicar los resultados propios en revistas científicas no estaba todavía difundida ampliamente, por lo que muchos de los descubrimientos más importantes fueron comunicados al mundo en forma de cartas, panfletos o libros de circulación limitada, por lo que es difícil determinar quién fue el primero en encontrar este hecho o aquél. Esta desafortunada situación alcanzó un clímax en la amarga disputa por la prioridad en la invención del cálculo, un asunto que enfrentó a algunas de las mejores mentes de la época, y que en gran medida fue responsable del atraso de la matemática en Inglaterra durante casi un siglo después de Newton.

Como alguien que ha enseñado matemáticas en todos los niveles de la instrucción universitaria, soy consciente de la actitud negativa de muchos estudiantes hacia la materia. Hay muchas razones para esto, una de las cuales es el modo esotérico y árido en que enseñamos esta materia. Tendemos a abrumar a nuestros estudiantes con fórmulas, definiciones, teoremas y demostraciones, pero rara vez mencionamos la evolución histórica de estos hechos, dando la impresión de que nos fueron legados, como los diez mandamientos, por alguna autoridad divina. La historia de la matemática es una buena forma de corregir esas impresiones. En mis clases siempre trato de meter un bocado de historia de las matemáticas o viñetas de las personas cuyos nombres están asociados con las fórmulas y los teoremas. Este libro se desarrolló en parte con esta metodología. Espero que satisfará el objetivo propuesto.

Van muchos agradecimientos para mi esposa, Dalia, por su ayuda invaluable y su apoyo para conseguir que se escribiera este libro, y para mi hijo Eyal por dibujar las ilustraciones. Sin ellos este libro nunca se habría hecho realidad.

Skokie, Illinois
7 de enero, 1993

1. John Napier, 1614

*Considerando que no hay nada más problemático en la práctica de la matemática, ni nada que moleste y obstaculice más los cálculos, que la multiplicación, división, extracción de raíces cuadradas y cúbicas de grandes números [...] comencé por consiguiente a considerar en mi mente con qué arte rápido y definitivo podía remover esos obstáculos*¹

JOHN NAPIER,
Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1614)

Rara vez en la historia de la ciencia una idea matemática abstracta fue recibida con más entusiasmo por toda la comunidad científica que la invención de los logaritmos. Y uno difícilmente puede imaginar a una persona menos prometedora para haber hecho este invento. Su nombre era John Napier.²

John, el hijo de sir Archibald Napier y su primera esposa, Janet Bothwell, nació en 1550 (se desconoce la fecha exacta) en el latifundio de la familia, en el castillo de Merchiston, cerca de Edimburgo, Escocia. Los detalles de sus primeros años son escasos. A la edad de trece años fue enviado a la Universidad de St. Andrews, donde estudió religión. Después de una estadía temporal en el exterior volvió a su tierra natal en 1571 y se casó con Elizabeth Stirling, con quien tuvo dos hijos. Tras la muerte de su esposa en 1579, se casó con Agnes Chisholm, con quien tuvo diez hijos más. El segundo hijo de este matrimonio, Robert, sería más tarde el albacea literario de su padre. Después de la muerte de sir Archibald en 1608, John retornó a Merchiston, donde pasó el resto de su vida como el octavo *laird* del castillo.³

Las primeras ocupaciones de Napier difícilmente podían insinuar su futura creatividad matemática. Sus intereses principales estaban en la religión o, para ser más precisos, en el activismo religioso. Como protestante ferviente y firme opositor del papado, publicó sus opiniones en *A Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John* (1593), un libro en el cual atacaba amargamente a la iglesia católica, afirmando que el papa era el anticristo y urgiendo al rey de Escocia Jaime VI (quien más tarde se convertiría en el rey Jaime I de Inglaterra) a purgar su casa y su corte de todos los “papistas, ateos e indiferentes”.⁴ También predijo que el día del juicio final caería entre 1688 y 1700. El libro fue traducido a varios idiomas y alcanzó veintiún ediciones (diez de las cuales aparecieron durante la vida del autor), lo que hizo creer a Napier que

1. Citado en George A. Gibson, “Napier and the Invention of Logarithms”, en E. M. Horsburgh, comp., *Handbook of the Napier Tercentenary Celebration*, p. 9.

2. El nombre ha aparecido en diferentes formas como Neper, Neper y Naipper; la ortografía correcta parece ser desconocida. Véase Gibson, “Napier and the Invention of Logarithms”, p. 3.

3. La genealogía familiar fue registrada por un descendiente de John: Mark Napier, *Memoirs of John Napier of Merchiston*.

4. P. Hume Brown, “John Napier of Merchiston”, en Cargill Gilston Knott, comp., *Napier Tercentenary Memorial Volume*, p. 42.

su nombre —o lo poco de él que pudiera quedar— estaba asegurado en la historia.

Los intereses de Napier, sin embargo, no estaban limitados a la religión. Como terrateniente interesado en mejorar sus cultivos y su ganado, experimentó con distintos abonos y sales para fertilizar el suelo. En 1579 inventó un tornillo hidráulico para controlar el nivel de las aguas en minas de carbón a cielo abierto. Mostró además un ardiente interés en asuntos militares, atrapado sin duda por el temor general de que el rey Felipe II de España estaba por invadir Inglaterra. Proyectó la construcción de grandes espejos que podrían incendiar los barcos enemigos, lo cual recuerda los planes de Arquímedes para la defensa de Siracusa mil ochocientos años antes. Imaginó una pieza de artillería que podría “limpiar un campo de cuatro millas de circunferencia de todas las criaturas vivientes que midan más de un pie de altura”, una carroza con “una boca móvil de metal” que podría “desparramar destrucción en todas las direcciones” y también un instrumento para “navegar bajo el agua, con buzos y otras estratagemas para dañar a los enemigos”, todas premoniciones de la tecnología militar moderna.⁵ No se sabe si en realidad alguna de estas máquinas fue construida.

5. *Ibid.*, p. 47.

Como pasa habitualmente con hombres con intereses tan diversos, Napier fue protagonista de muchas historias. Parece haber sido el típico querellante, que a menudo se ve envuelto en disputas con sus vecinos y arrendatarios. De acuerdo con uno de estos relatos, Napier se irritó por las palomas de un vecino que descendían en su propiedad y comían sus granos. Advertido por Napier de que si no detenía a las palomas éste las cazaría, el vecino ignoró despectivamente la advertencia diciendo que Napier era libre de capturar las palomas si lo deseaba. Al día siguiente el vecino encontró sus palomas medio muertas en el césped de Napier. Napier simplemente había humedecido sus granos con una fuerte bebida alcohólica para que los pájaros quedaran borrachos y apenas pudieran moverse. De acuerdo con otra anécdota Napier creía que uno de sus sirvientes estaba robando sus pertenencias. Anunció que su gallo negro identificaría al transgresor. Los sirvientes fueron puestos en fila en una habitación a oscuras, donde a cada uno se le pidió que pasara su mano por el lomo del gallo. Sin que los sirvientes lo supieran, Napier había pintado al ave con una capa de hollín. Al salir del cuarto cada sirviente, le pedía que mostrara sus manos; el culpable, temiendo tocar al gallo, resultó que tenía las manos limpias, delatando así su culpabilidad.⁶

6. *Ibid.*, p. 45.

Todas esas actividades, incluyendo las fervientes campañas religiosas de Napier, se habrían perdido mucho tiempo atrás. Si el nombre de Napier tiene un lugar asegurado en la historia, no es por sus libros tan vendidos o su ingenio mecánico, sino por una idea matemática abstracta que le tomó veinte años desarrollar: los logaritmos.

El siglo XVI y el principio del XVII vieron una enorme expansión del conocimiento científico en todas las áreas. La geografía, la física y la

astronomía, liberadas al fin de antiguos dogmas, cambiaron rápidamente la percepción humana del universo. El sistema heliocéntrico de Copérnico finalmente comenzó a encontrar aceptación, tras luchar durante casi un siglo contra la opinión de la iglesia. La circunnavegación del globo en 1521 por Magallanes y Elcano inauguró una nueva era de exploración de los mares que difícilmente dejó un rincón del mundo sin ser visitado. En 1569 Gerhard Mercator publicó su celebrado mapa del nuevo mundo, un acontecimiento que tendría un impacto decisivo en el arte de la navegación. En Italia Galileo Galilei sentaba los fundamentos de la mecánica y en Alemania Johannes Kepler formulaba sus tres leyes del movimiento planetario, liberando a la astronomía de una vez por todas del universo geocéntrico de los griegos. Estos desarrollos involucraban cantidades de datos numéricos cada vez mayores, forzando a los científicos a dedicar mucho tiempo a tediosos cálculos numéricos. La época requería de un invento que liberara de esa carga a los científicos de una vez por todas. Napier enfrentó ese reto.

No tenemos registros de cómo Napier tropezó con la idea que habría de conducirle finalmente a su invención. Él era versado en trigonometría y sin duda estaba familiarizado con la fórmula

$$\operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)].$$

Esta fórmula, y otras similares para $\cos A \cdot \cos B$ y $\operatorname{sen}A \cdot \cos B$, eran conocidas como las reglas *prosthaphaereticas*, por las palabras griegas que significaban “adición y sustracción”. Su importancia yace en el hecho de que el producto de dos expresiones trigonométricas como $\operatorname{sen}A \cdot \operatorname{sen}B$ puede ser calculado encontrando la suma o la diferencia de otras expresiones trigonométricas, en este caso $\cos(A-B)$ y $\cos(A+B)$. Como es más fácil sumar y restar que multiplicar y dividir, estas fórmulas ofrecen un sistema primitivo de reducción de una operación aritmética a otra más simple. Fue probablemente esta idea lo que puso a Napier sobre la pista correcta.

Una segunda idea, más directa, involucra la idea de una *progresión geométrica*, una sucesión de números con una razón fija entre términos sucesivos. Por ejemplo, la sucesión 1, 2, 4, 8, 16, ... es una progresión geométrica con la razón común 2. Si denotamos esta razón común con q , entonces, comenzando con 1, los términos de la progresión son 1, q , q^2 , q^3 , y así sucesivamente (nótese que el n -ésimo término es q^{n-1}). Mucho antes de la época de Napier, se había observado que existe una relación simple entre los términos de una progresión geométrica y los *exponentes* o índices correspondientes de la razón común. El matemático alemán Michael Stifel (1487-1567), en su libro *Arithmetica integra* (1544), formuló esta relación del siguiente modo: si multiplicamos dos términos cualesquiera de la progresión 1, q , q^2 , q^3 , ..., el resultado será el mismo que si hubiéramos *sumado* los exponentes correspondientes.⁷ Por ejemplo, $q^2 \cdot q^3 = (q \cdot q) \cdot (q \cdot q \cdot q) = q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = q^5$, un resultado que podía obtenerse sumando los exponentes 2 y 3. De manera similar, dividir

7. Véase David Eugene Smith, “The Law of Exponents in the Works of the Sixteenth Century”, en *Napier Tercentenary Memorial Volume*, p. 81.

cualquier término de una progresión geométrica por otro término es equivalente a *restar* sus exponentes: $q^5/q^3 = (q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q)/(q \cdot q \cdot q) = q \cdot q = q^2 = q^{5-3}$. Tenemos entonces las simples reglas $q^m \cdot q^n = q^{m+n}$ y $q^m/q^n = q^{m-n}$.

Aparece un problema, sin embargo, si el exponente del denominador es mayor que el del numerador, como en q^3/q^5 ; nuestra regla nos da $q^{3-5} = q^{-2}$, una expresión que no tenemos definida. Para evitar esta dificultad, simplemente definimos $q^{-n} = 1/q^n$, de modo que $q^{3-5} = q^{-2} = 1/q^2$, lo cual concuerda con el resultado obtenido al dividir directamente q^3 por q^5 .⁸ (Nótese que con el propósito de ser consistentes con la regla $q^m/q^n = q^{m-n}$, cuando $m = n$ debemos definir también $q^0 = 1$.) Con estas definiciones en mente, podemos extender indefinidamente una progresión geométrica en ambas direcciones: $\dots, q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, q^0 = 1, q^1, q^2, q^3$. Vemos que cada término es una potencia de la razón común q , y que los exponentes $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ forman una *progresión aritmética* (en una progresión aritmética la *diferencia* entre términos sucesivos es constante, en este caso igual a 1). Esta relación es la idea clave detrás de los logaritmos; pero mientras que Stifel tenía en mente sólo valores enteros de los exponentes, la idea de Napier fue extender esto a un rango de valores continuo.

8. Exponentes fraccionarios y negativos habían sido propuestos por algunos matemáticos ya en el siglo XIV, pero su uso se difundió debido al matemático inglés John Wallis (1616-1703) y más aún gracias a Newton, quien en 1676 sugirió la notación moderna a^{-n} y $a^{m/n}$. Véase Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, vol. 1, *Elementary Mathematics*, pp. 354-356.

Su línea de razonamiento fue ésta: si podemos escribir *cualquier* número positivo como una potencia de un cierto número dado y fijo (que más adelante se llamará la base), entonces *la multiplicación y la división de números sería equivalente a la suma y la resta de sus exponentes*. Además, elevar un número a la n -ésima potencia (esto es, multiplicarlo por sí mismo n veces) sería equivalente a *sumar* el exponente n veces —esto es, multiplicar el exponente por n — y hallar la raíz n -ésima de un número sería equivalente a dividir el exponente por n . En síntesis, cada operación aritmética se reduciría a una anterior en la jerarquía de las operaciones, disminuyendo en gran medida la dificultad de los cálculos numéricos.

Ilustremos el funcionamiento de esta idea eligiendo como nuestra base el número 2. La tabla 1.1 muestra las sucesivas potencias de 2, comenzando con $n = -3$ y finalizando con $n = 12$. Supongamos que deseamos multiplicar 32 por 128. Miramos en la tabla los exponentes de 32 y 128, y encontramos que éstos son 5 y 7, respectivamente. Sumando estos exponentes nos da 12. Ahora hacemos el proceso inverso, mirando a qué número le corresponde el exponente 12; éste es el número 4 096, la respuesta deseada. Como un segundo ejemplo, supongamos que queremos encontrar 4^5 . Hallamos el exponente correspondiente a 4, que es 2, y esta vez lo *multiplicamos* por 5 para obtener 10. Después buscamos el número cuyo exponente es 10, y encontramos que es 1 024. Y, en efecto, $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1\ 024$.

TABLA 1.1.
Potencias de 2.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

Por supuesto, un esquema tan elaborado es innecesario para calcular exclusivamente con enteros; el método sería práctico sólo si pudiese ser usado con números cualesquiera, sean enteros o fracciones. Pero para que esto ocurra primero debemos llenar los amplios huecos entre las entradas de nuestra tabla. Podemos hacer esto de dos maneras: usando exponentes fraccionarios, o eligiendo como base un número suficientemente pequeño tal que sus potencias crezcan razonablemente despacio. Los exponentes fraccionarios, definidos como $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ (por ejemplo, $2^{5/3} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} \approx 3.17489$), no eran todavía plenamente comprendidos en la época de Napier,⁹ por lo que él no tuvo más opción que la segunda. ¿Pero una base qué tan pequeña? Claramente, si la base es *demasiado* pequeña, sus potencias crecerían demasiado lentamente, de nuevo haciendo al sistema de poca utilidad práctica. Parece que un número cercano a 1, pero no demasiado cercano, sería una posición intermedia razonable. Tras años de luchar con este problema, Napier se decidió por 0.9999999, o $1 - 10^{-7}$.

¿Pero por qué esta elección en especial? La respuesta parece estar en la preocupación de Napier de minimizar el uso de fracciones decimales. Fracciones en general, por supuesto, habían sido utilizadas durante miles de años antes de la época de Napier, pero éstas se escribían como fracciones comunes, esto es, como cocientes de enteros. Las fracciones *decimales* —la extensión de nuestro sistema de numeración decimal a números menores que 1— apenas habían sido introducidas en Europa¹⁰ y la gente todavía no se sentía cómoda con ellas. Para minimizar su uso, Napier hizo esencialmente lo que hacemos hoy cuando dividimos un peso en cien centavos o un kilómetro en mil metros: dividió la unidad en un enorme número de subunidades, considerando a cada una como una unidad nueva. Como su principal objetivo era reducir el tremendo trabajo involucrado en los cálculos trigonométricos, siguió la práctica utilizada entonces en trigonometría de dividir el radio de un círculo unitario en 10 000 000 o 10^7 partes. Por lo tanto, si restamos de la unidad su 10^7 -ésima parte, obtenemos el número más cercano a 1 en este sistema, digamos $1 - 10^{-7}$ o 0.9999999. Ésta fue, entonces, la razón común (“proporción”, en sus propias palabras) que utilizó Napier para construir su tabla.

Y entonces se impuso a sí mismo la tarea de hallar, mediante tediosas restas, los términos sucesivos de su progresión. Ésta seguramente debe haber sido una de las tareas menos creativas que haya enfrentado un científico, pero Napier la llevó adelante hasta el final, dedicando veinte años de su vida (1594-1614) a completar el trabajo. Su tabla inicial contenía sólo 101 entradas: comenzaba con $10^7 = 10\,000\,000$ y seguía con $10^7(1 - 10^{-7}) = 9\,999\,999$, después $10^7(1 - 10^{-7})^2 = 9\,999\,998$, y así hasta $10^7(1 - 10^{-7})^{100} = 9\,999\,900$ (ignorando la parte fraccionaria 0.0004950); cada entrada se obtiene restando del término precedente su 10^7 -ésima parte. Repitió entonces todo el proceso de nuevo, comenzando una vez más con 10^7 , pero esta vez tomando como su pro-

9. Véase la nota 8.

10. Por el científico flamenco Simon Stevin (o Stevinius, 1548-1620).

porción el cociente entre el primero y el último números de su tabla original, esto es $9\,999\,999:10\,000\,000 = 0.99999$ o $1 - 10^{-5}$. Esta segunda tabla contenía cincuenta y un entradas, la última de las cuales era $10^7(1 - 10^{-5})^{50}$ o casi $9\,995\,001$. Seguía una nueva tabla con veintiún entradas, usando la razón $9\,995\,001:10\,000\,000$; la última entrada en esta tabla era $10^7 \times 0.9995^{20}$, o aproximadamente $9\,900\,473$. Finalmente, a partir de cada una de las entradas en esta última tabla Napier creó sesenta y ocho entradas adicionales, utilizando la razón $9\,900\,473:10\,000\,000$, muy cercana a 0.99 ; la última entrada resultó ser entonces $9\,900\,473 \times 0.99^{68}$, muy cercana a $4\,998\,609$ —aproximadamente la mitad del número original.

Hoy, por supuesto, puede delegarse esta tarea a una computadora; incluso con una calculadora manual el trabajo puede hacerse en unas pocas horas. Pero Napier tuvo que hacer todos estos cálculos sólo con papel y lápiz. Uno puede entender entonces su preocupación por minimizar el uso de fracciones decimales. En sus propias palabras:

Como al formar esta progresión [las entradas de la segunda tabla], la proporción entre $10\,000\,000.00000$, el primero de la segunda tabla, y $9\,995\,001.222927$, el último de la misma, es problemática; por lo tanto calcule los veintiún números en la proporción más simple de $10\,000$ a $9\,995$, que es suficientemente cercana a ésta; el último de éstos, si usted no se ha equivocado, será $9\,900\,473.57808$.¹¹

11. Citado en David

Eugene Smith,

A Source Book in Mathematics, p. 150.

Una vez completada esta monumental tarea, a Napier le restaba bautizar su creación. Al principio llamó al exponente de cada potencia su “número artificial” pero más tarde se decidió por el término *logaritmo*, indicando con esta palabra “razón” y “número”. En notación moderna, esto viene a significar que si (en su primera tabla) $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$, entonces el exponente L es el logaritmo (neperiano) de N . La definición de logaritmo que dio Napier es diferente en muchos aspectos de la definición moderna (introducida por Leonhard Euler en 1728): si $N = b^L$, donde b es un número positivo fijo distinto de 1, entonces L es el logaritmo (en base b) de N . Así, en el sistema de Napier $L = 0$ corresponde a $N = 10^7$ (esto es, $\text{NapLog}(10^7) = 0$), mientras que en el sistema moderno $L = 0$ corresponde a $N = 1$ (esto es, $\log_b(1) = 0$). Aún más importante, las reglas básicas de operación con logaritmos —por ejemplo, que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos individuales— no es válida para la definición de Napier. Y finalmente, como $1 - 10^{-7}$ es menor que 1, el logaritmo de Napier *disminuye* con números crecientes, mientras que nuestros logaritmos comunes (en base 10) crecen. Sin embargo, estas diferencias son relativamente menores, y meramente una consecuencia de la insistencia de Napier de que la unidad debería ser igual a 10^7 subunidades. Si él no hubiera estado tan intranquilo con las fracciones decimales, su definición podría haber sido más simple y cercana a la moderna.¹²

12. Otras peculiaridades de los logaritmos de Napier se discuten en el apéndice 1.

Mirando hacia atrás, sus preocupaciones con las fracciones fueron un desvío innecesario. Y al tomarlo, Napier inadvertidamente pasó a un pelo de distancia de descubrir un número que, un siglo después, sería reconocido como la base universal de los logaritmos y que en matemáticas tendría el segundo lugar en importancia sólo superado por el número π . Este número, e , es el límite de $(1 + 1/n)^n$ cuando n tiende a infinito.¹³

13. En realidad, Napier estuvo cerca de descubrir el número $1/e$, definido como el límite de $(1 - 1/n)^n$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como hemos visto, su definición de logaritmo es equivalente a la ecuación $N = 10^7(1 - 10^{-7})^L$. Si dividimos N y L por 10^7 (lo que sólo supone un reescalamiento de nuestras variables), la ecuación se convierte en $N^* = [(1 - 10^{-7})^{10^7}]^{L^*}$, donde $N^* = N/10^7$ y $L^* = L/10^7$. Como $(1 - 10^{-7})^{10^7} = (1 - 1/10^7)^{10^7}$ es muy cercano a $1/e$, los logaritmos neperianos son prácticamente logaritmos en base $1/e$. Sin embargo, la afirmación frecuente de que Napier descubrió esta base (o incluso el propio e) es errónea. Como hemos visto, él no pensó en términos de una base, un concepto desarrollado mucho después con la introducción de los logaritmos “comunes” (en base 10).