

# 1. La imaginación y las raíces cuadradas

## IMAGÍNALO

Imagina el *Pensador* de Rodin, encorvado por su esfuerzo mental. No tiene su codo derecho apoyado en el muslo derecho, como tú y yo lo habríamos hecho, sino que lo tiene sobre el muslo izquierdo,<sup>1</sup> trabado en un esfuerzo poco elegante, con los músculos tensos por sus reflexiones. ¿Pero puede él, o podemos nosotros, *sentir* realmente nuestra facultad para imaginar cuando trabaja, se esfuerza y obtiene finalmente un acto de la imaginación?

Consideremos el rango de nuestras experiencias imaginativas. Consideremos, por ejemplo, cuán inmediata es la experiencia de imaginar lo que leemos. Elaine Scarry ha señalado que no existe una “experiencia palpable” correspondiente a este acto imaginativo.<sup>2</sup> Experimentamos, por supuesto, el *efecto* de lo que estamos leyendo. Scarry afirma que si leemos una frase como “el amarillo del tulipán”<sup>3</sup> formamos, tal vez, una imagen en nuestra mente y experimentamos el efecto emocional —cualquiera que éste sea— que dicha imagen nos produce. Pero no tenemos una *experiencia palpable* de cómo se forma esa imagen, dice Scarry. Volveremos a esta idea más adelante.

Tal vez deberíamos contrastar la lectura con el intento de pensar en algo por nosotros mismos. El comentario de Rainer Maria Rilke sobre el funcionamiento de nuestra imaginación (“somos las abejas de lo invisible”<sup>4</sup>) pinta nuestras búsquedas imaginativas no como *experiencias*

---

<sup>1</sup> Le agradezco a David Gewanter señalarme esto.

<sup>2</sup> *Dreaming by the Book*, *op. cit.*, p. 42.

<sup>3</sup> Del poema en prosa de John Ashbery “Whatever It Is, Wherever You Are”, en *A Wave: Poems by John Ashbery*, Noonday Press-Farrar, Straus and Giroux, 1985, pp. 63-65.

<sup>4</sup> “Nuestra tarea es estampar en nuestro interior esta tierra efímera y agonizante, de manera tan profunda, dolorosa y apasionada que su ser pueda resurgir en nosotros. Somos las abejas de lo invisible.” Carta de Rilke a su traductor polaco, Witold von Hulewicz, 13 de noviembre de 1925.

*completamente impalpables* (según Scarry), pero tampoco como *contorsiones* (según Rodin). Nuestra recolección de la miel del mundo imaginario no es inmediata; nos cuesta trabajo. Pero aunque este acto requiere viajar cierta distancia, mezclarse con algo que no es de nuestra especie, comunicar con la danza a nuestros semejantes lo que hemos hecho y dónde hemos estado, y, finalmente, traer de regreso esa única gota resplandeciente, es algo que hacemos sin contorsionarnos. Es parte de lo que somos como abejas.

Pensar en *la imaginación imaginando* se hace difícil por la eficacia y la velocidad de esta facultad. La imaginación es un genio que vuela a tu servicio. ¿Quieres un elefante? Por supuesto: lo tienes en la figura 1.

Lees “el amarillo del tulipán” y, de nuevo, ahí lo tienes: una cinta amarilla delineada en tu pantalla mental.

Más reveladores, sin embargo, son los otros momentos de nuestro pensamiento, donde el ingenio no pisa tan firmemente, momentos compuestos a medias por la perplejidad y por la expectativa; momentos, por ejemplo, cuando alguna nueva imagen, o una nueva perspectiva, está por revelársenos, pero se resiste a salir a la superficie y debemos luchar para pescarla.

En esos instantes es como si las aguas de la imaginación estuvieran agitadas; lanzaste tu caña de pescar desde un bote un tanto movedizo y sientes un tirón en la cuerda, pero no tienes una noción clara de qué fue lo que picó. ¿Una trucha, una vieja bota o alguna especie submarina nunca antes vista? Lo que sabes es que sentiste claramente el tirón.

Quiero reflexionar sobre las conexiones internas de nuestra imaginación cuando está experimentando (o recreando) un tirón semejante en particular. El ejemplo que propongo que consideremos tiene lugar en la historia de las matemáticas. Podría ser descrito como *un momento de inquietud al anticipar que estamos por presenciar la lenta emergencia de un acto de la imaginación*. *Momento*, sin embargo, no es aquí la palabra correcta, dado que hablamos en realidad de un periodo que se extiende a lo largo de tres siglos. Y *anticipar* arrastra un tono demasiado progresista y tal vez demasiado personal, dado que dicho “acto” no se produjo por completo en ninguna mente individual. Hay muchas “abejas de lo invisible” en la historia original.



FIGURA 1. Imagina aquí tu elefante.

Si tenemos éxito, estaremos reviviendo la representación mental de un concepto que, para quienes lo pensaron originalmente, nunca

había sido visto ni pensado antes, y que parecía ser contrario a las cosas vistas o pensadas antes.<sup>5</sup> Por supuesto que el acto de pensar sobre cosas nunca antes pensadas es el pan de cada día del arte o de la ciencia. El chelista Yo-Yo Ma sugirió que el trabajo del artista es ir hasta los límites y luego volver.<sup>6</sup> Rilke expresó un sentimiento similar del siguiente modo: “Las obras de arte son siempre el producto del ‘haber estado en peligro’, o de una experiencia de ‘haber ido hasta el final’, hasta el punto desde el cual no es posible ya ir más lejos.”<sup>7</sup>

Si “el amarillo del tulipán” se puede imaginar de forma instantánea, en cambio, *las raíces cuadradas de cantidades negativas* fueron un concepto utilizado comúnmente en las matemáticas por más de tres siglos antes de que se descubriera una interpretación geométrica satisfactoria. Si trabajas exclusivamente con cantidades positivas, tienes menos dificultad en llegar a manejar las raíces cuadradas: la raíz cuadrada de un número positivo es apenas una cantidad cuyo cuadrado es ese número.

Todo número positivo tiene una única raíz cuadrada positiva. La raíz cuadrada de 4, por ejemplo, es 2. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 2? Sabemos, como mínimo, que su cuadrado es 2. Utilizando la ecuación que afirma esto,  $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ , prueba a estimar  $\sqrt{2}$ . ¿Es menor que  $3/2$ ? ¿Entiendes por qué  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$ ?

Las raíces cuadradas se encuentran a menudo en la geometría como longitudes de segmentos. Veremos pronto, por ejemplo, que  $\sqrt{2}$  es la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyos lados tienen longitud 1, como se muestra en la figura 2. De la misma manera, si tenemos un cuadrado tal que sabemos que su área es igual a  $A$  metros cuadra-

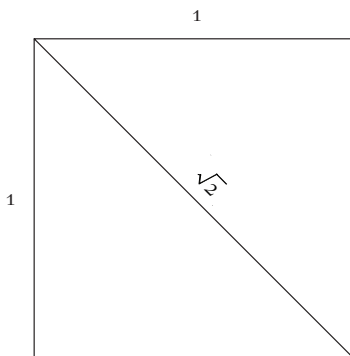


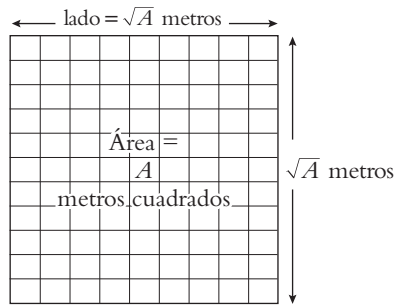
FIGURA 2. La diagonal de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad mide  $\sqrt{2}$ .

<sup>5</sup> Esta frase me recuerda el encabezado de una vieja caricatura en la cual un niño es perseguido por un demonio que se imaginó y grita: “¡Se parece a algo que nunca había visto!”

<sup>6</sup> Recuerdo esto, tal vez en forma imperfecta, de una entrevista que escuché en la radio.

<sup>7</sup> Carta de Rilke a su esposa Clara, 24 de junio de 1907, recogida más tarde en *Cartas sobre Cézanne*.

FIGURA 3. Supongamos que el área de cada uno de los cuadrados pequeños de este diagrama es igual a un metro cuadrado. Como hay cien cuadrados, resulta que  $A = 100$ , y las dimensiones del cuadrado mayor son  $\sqrt{A}$  por  $\sqrt{A}$ , esto es, 10 por 10.



dos, entonces la longitud de cada uno de sus lados, como se ve en la figura 3, es igual a  $\sqrt{A}$  metros.

En el *Menón*, de Platón,<sup>8</sup> Sócrates le pide a un joven esclavo de Menón construir un cuadrado cuya área sea el doble del área de un cuadrado dado. En la figura 4 se ve el diagrama que finalmente dibuja Sócrates para ayudar a su interlocutor a resolver el problema. El contorno de este diagrama es un cuadrado de  $2 \times 2$  (cuya área, por tanto, es 4) construido a partir de cuatro cuadrados de  $1 \times 1$  (cada uno de área 1). Pero en su centro podemos tomar un cuadrado que corte las esquinas del cuadrado grande (apoyado, como se ve, en una de sus propias esquinas). Reordenando las piezas triangulares que forman el diagrama, ¿puedes ver, como lo hizo el joven amigo de Sócrates en el *Menón*, que el cuadrado central tiene un área igual a 2 y que, por tanto, cada uno de sus lados tiene como longitud  $\sqrt{2}$ ?

Los lados del nuevo cuadrado diagonal tienen un doble papel: son también las diagonales de los pequeños cuadrados (de  $1 \times 1$ ). Por tanto, como prometí unos pocos párrafos antes, vemos a  $\sqrt{2}$  como la longitud de la diagonal dibujada en un cuadrado cuyos lados tienen longitud 1.

Los primeros matemáticos pensaron las raíces cuadradas como “lados”; los matemáticos italianos del siglo xvi podían referirse de vez en cuando a la raíz de un número simplemente como su *lato*, su lado. Entonces, a primera vista, los números negativos no tienen raíces cuadradas, ya que (como voy a explicar más tarde) el cuadrado de cualquier cantidad numérica (positiva o negativa) es siempre positivo. De hecho, una segunda y una tercera mirada tenderán a confirmar la sospecha de que los números negativos *no pueden* tener raíces cuadradas.

Si pensamos las raíces cuadradas de manera geométrica, como aca-

<sup>8</sup> En *Diálogos*, II, trad. de F. J. Oliveri, Madrid, Gredos, 1983.

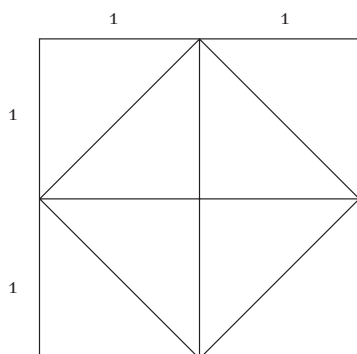


FIGURA 4. Cómo construyó Sócrates un cuadrado con el doble del área de otro cuadrado dado.

bamos de hacerlo, preguntar por la raíz cuadrada de una cantidad negativa es como preguntar cuál es la longitud del lado de un cuadrado cuya área es *menor que cero*. Esto nos suena más a un koan zen que a una pregunta sujeta a una respuesta cuantitativa.<sup>9</sup> Sin embargo, estas raíces cuadradas aparentemente inexistentes mostraron ser, desde muy temprano, *útiles*. Pero los primeros que utilizaron las raíces cuadradas de números negativos sintieron náuseas al invocar tales objetos etéreos. Llamaron a esas extrañas raíces cuadradas *números imaginarios*, queriendo decir con eso que eran difíciles de ubicar entre los objetos matemáticos reales.

Luego emergió una imagen sorprendentemente satisfactoria de estas raíces cuadradas. Dos (o posiblemente tres, o aún más) personas hallaron, de manera independiente, y casi al mismo tiempo, una forma de *imaginar* de otro modo estos “números” inimaginables.<sup>10</sup> ¡Qué acto dramático: hallar un lugar en nuestra imaginación para estos conceptos tan perturbadores!

<sup>9</sup> Los estudiantes de cálculo verán esta interpretación de las integrales como “áreas con signo” de ciertas regiones del plano. Pero esta noción no responde nuestro koan zen: el *área con signo* de dichas regiones es simplemente la diferencia entre el área de la porción de la región que está sobre el eje horizontal y la de la porción que está debajo; esto es positivo o negativo dependiendo de que la parte mayor de la región esté ubicada por encima o por debajo del eje horizontal.

<sup>10</sup> Un amigo sugirió que, como a ninguno de los que estaban directamente involucrados en la publicación de este descubrimiento se debe ninguna otra contribución matemática importante (con la excepción de Legendre, quien, como veremos, tuvo un papel curioso) —esto es, dado que todos estos individuos estaban en la periferia del intenso progreso matemático de finales del siglo XVIII—, es posible que esta “imagen pictórica” que se les ocurrió estu-

Esta “forma de imaginar” se ha convertido en una propiedad intelectual común que, junto con los números a los que ayudó a imaginar, ha hallado un uso cabal y ubicuo, no sólo por los matemáticos sino por los ingenieros que trabajan con el análisis matemático, y por los físicos.

El objetivo de este libro no es ofrecer una reseña histórica; para ello en la bibliografía se comenta una lista de fuentes que proveen un recuento sistemático —lógico o histórico— del concepto de número. Más bien, su propósito es recrear el cambio en el pensamiento matemático que hizo posible imaginar esos números.

Sin duda, la poesía tiene “cambios de perspectiva” en su naturaleza: el “giro” de un poema, tanto en su punto de vista como en su tipografía, se celebra con la palabra *estrofa*. La poesía nos demanda prestar atención a esos giros. Hay quienes prestan tal atención mientras leen poesía, pero nunca han hecho nada similar con las matemáticas; espero que a ellos les sea útil el estilo de presentación que he adoptado, que va y viene entre las reflexiones sobre el trabajo imaginativo al pensar sobre poesía y al pensar sobre matemáticas.

Al proceder con nuestro tema matemático, conviene que sintamos primero la inconformidad de los primeros matemáticos que se encontraron con los números imaginarios; luego, la posibilidad de que algún cambio, algún nuevo punto de vista sobre los números, pueda ayudar a domar el concepto de número imaginario. Después debemos ser conscientes del surgimiento de este punto de vista en nosotros mismos. Finalmente, veremos que nuestra nueva actitud hacia los números unifica otras intuiciones dispersas y nos ayuda a interpretar una fórmula maravillosa que dejó perplejos a los matemáticos del siglo xvi.

En cuanto a los requisitos, cuantas menos matemáticas sepas, mejor preparado estarás para la tarea que tienes por delante. Para seguir las matemáticas que se presentan aquí, sólo necesitas tener la capacidad de realizar ciertas multiplicaciones y sustituciones sencillas cuando el texto lo requiera, y de aceptar con ecuanimidad la aparición ocasional de ecuaciones algebraicas sencillas como las que te encontraste en las primeras semanas del álgebra de la escuela secundaria.<sup>11</sup> Si puedes hacer, o

---

quiera, en realidad, “en el aire”, en el “dominio público”, al menos al punto de que dicho “público” incluyera a Euler y sus colegas. En todo caso, recoger tales monedas en el aire es un truco bastante bueno que, con suerte, también lograremos en las páginas siguientes.

<sup>11</sup> Algo que me dijo uno de los lectores de un primer borrador de este libro me llevó a reescribirlo sustancialmente. Mi manuscrito, dijo el lector, le recordaba una vez que estuvo hojeando el *Kamasutra*. El *Kamasutra* le prometía un

seguir, los ejercicios de muestra que se presentan en el primer apéndice a este capítulo, entonces estás listo para las matemáticas de este libro.

Comencemos por considerar una construcción imaginaria: la propia facultad de imaginar.

## LA IMAGINACIÓN

Cierto artículo matemático comienza con la invitación: “Imagina [...] un arreglo de puntos completamente simétrico e infinito.”<sup>12</sup> En el prólogo a *Enrique V*, de Shakespeare, el Coro te pide a ti, como público, que permitas a los actores,

... que son grandes cifras en esta narración,  
actuar sobre las fuerzas de tu imaginación.<sup>†</sup>

*The Raj Quartet*, de Paul Scott, comienza con la siguiente petición al lector:

IMAGINA, entonces, un paisaje llano, oscuro al principio, pero que aun así le transfiere una idea de su inmensidad a una niña que corre en las sombras aún más profundas arrojadas por el muro de los Bibighar Gardens.<sup>13</sup>

¡Qué instrucción tan problemática: que nos digan *imagina!* ¿Qué estamos haciendo? ¿Tenemos el lenguaje para decir qué estamos haciendo cuando cumplimos esa instrucción?

Nuestra palabra *imaginación* tiene un antecedente directo en latín, pero una palabra latina anterior, para designar un “objeto de la imaginación” (al menos como significado secundario) es *visio*, cuyo significado normal es “visión”.<sup>14</sup> Ésta es la explicación de Quintiliano sobre el origen del término latino *visio*: “Lo que los griegos llaman *fantasía* entre

---

mundo maravilloso con sólo tener la suficiente flexibilidad y destreza, pero él no las tenía. La presente versión de este libro tampoco las requiere.

<sup>12</sup> Dennis Sullivan, “The Density at Infinity of a Discrete Group of Hyperbolic Motions”, *Publications Mathématiques de l’IHES* 50 (1979), pp. 419-450.

<sup>†</sup> ...ciphers to this great accompt, / On your imaginary forces work.

<sup>13</sup> Paul Scott, *The Jewel in the Crown*, William Morrow, 1966; es el primer libro de *The Raj Quartet*.

<sup>14</sup> Para una discusión al respecto, y una historia más completa, comentada, sobre lo que se ha dicho acerca de la imaginación, véase el majestuoso libro de

nosotros se llama *imaginativa*, y por ella se nos representan con tanta viveza las cosas ausentes que parece tenerlas a la vista.”<sup>15</sup> La definición de Quintiliano de la visión como “imaginativa” es útil en cierta medida. Incluye cosas que hemos visto antes pero que ahora están ausentes. Sin embargo, su alcance no abarca a los unicornios y las esfinges que nos han lanzado continuamente los herreros y ebanistas de la imaginación.

Uno podría tratar de extender la definición de Quintiliano —según el ejemplo de Jeremy Bentham— afirmando que la imaginación es una facultad por la cual “un número de ideas abstractas se componen en una imagen”.<sup>16</sup> La definición de Bentham va un poco más lejos que la de Quintiliano, pero no mucho, porque seguramente existen objetos de la imaginación que no pueden ser procesados en términos del álgebra de imágenes simples conocidas previamente.

Asimismo la definición de Bentham, según la cual la facultad de imaginar tiene el papel servil de una mesa de edición para imágenes de video del ojo de la mente, difícilmente podría satisfacer a William Wordsworth, quien preferiría una función más elevada de la imaginación: la función de conectar meros hechos con “esa infinitud sin la cual no habría poesía”.<sup>17</sup> Para Wordsworth, la facultad de imaginar es el alquimista trascendental que convierte, por ejemplo, la “simple” banda de oro de un anillo de bodas en un símbolo de unión eterna.

Sin embargo, Quintiliano, Bentham, Wordsworth y otros son de aquellos que simplemente se encogen de hombros y descartan la “imaginación” como “un ‘onomatoidé’, esto es, un pseudonombre que en realidad no designa nada porque su significado es demasiado amplio”.<sup>18</sup> Pero ¿es *una* cosa? Samuel Taylor Coleridge hace una distinción entre lo que llama la *imaginación* y su hermana menos atrevida, la *fantasía*, “que no es en realidad otra cosa que una forma de memoria emancipada del orden del tiempo y del espacio”.<sup>19</sup> En ciertos círculos, el con-

Eva Brann *The World of the Imagination. Sum and Substance*, Rowman & Littlefield, 1991.

<sup>15</sup> Marco Fabio Quintiliano, *Institución oratoria*, VI.III, trad. de I. Rodríguez y P. Sandier, Conaculta, 1999, p. 299.

<sup>16</sup> Para una discusión del *Essay on Logic*, de Bentham, véase Brann, *op. cit.*, p. 23.

<sup>17</sup> Según cuenta su amigo H. Crabb Robinson; para una discusión al respecto, véase Mary Warnock, *Imagination*, University of California Press, 1976, p. 114.

<sup>18</sup> Brann, *op. cit.*, p. 23. ¡Pero el espíritu detrás de esta cita no es el de Brann!

<sup>19</sup> *Biographia Literaria*, vol. I, cap. 13, en *Selected Poetry and Prose*, ed. de S. Potter, Nonesuch, 1971, p. 246.

cepto de la facultad de imaginar (o, al menos, la idea de que puedas decir algo sobre ella) despierta sospechas filosóficas; en otros, su mera mención despierta temores religiosos. Por ejemplo, una reseña reciente sobre libros de texto de historia para la escuela secundaria informa que, para satisfacer a la derecha religiosa estadounidense, la palabra *imaginar* está prácticamente eliminada de dichos libros. Se atribuyen estas palabras a un editor de McGraw-Hill: “Se nos dijo que tratáramos de evitar el uso de la palabra *imaginar* porque la gente en Texas siente que está muy próxima a la palabra *magia* y, por tanto, puede ser considerada anticristiana.”<sup>20</sup>

Pese a todo, hay algunas experiencias del intelecto que no podemos discutir sin enfrentarnos al tema de la imaginación.

### IMAGINAR LO QUE LEEMOS

Cuando miramos una página escrita, el ojo de nuestra mente ve algo diferente a la página blanca y la tinta negra. John Ashbery, en su poema en prosa “Whatever It Is, Wherever You Are”, escribe a propósito de la lectura:

[E]l amarillo del tulipán, por ejemplo, será un relámpago momentáneo de forma tal que después de haberse retirado podemos estar seguros de que aquí no hubo imaginación ni autosugestión, pero al mismo tiempo se vuelve tan inútil como todos los recuerdos idos.

Ashbery reflexiona sobre *los inventores de la escritura*:

Con qué propósito hicieron su retícula de forma tan efectiva, tanto que la superficie luminosa que estaba debajo se transformó en otra, también luminosa, pero tan cambiante y tan viva, con una sugestividad que es como de arenas movilizadas: dar un paso sería caer a través de la frágil red de incertidumbres al pantano de la certeza...

Sugiere asimismo que la imagen conjurada por la lectura relampaguea en nuestra pantalla mental y transmite “certezas sin calor ni luz”.<sup>21</sup> Para

<sup>20</sup> Alexander Stille, “The Betrayal of History”, *The New York Review of Books*, junio de 1998.

<sup>21</sup> *Op. cit.*

Elaine Scarry, la “vivacidad” del relámpago amarillo del tulipán impone la convicción, y lo repentino de su aparición en nuestra mente nos impide tener “una experiencia vívida de haber construido su imagen”:

la imaginación consiste únicamente en sus objetos, es cognoscible sólo a través de estos objetos y es notable entre los estados deliberados por no ser fácil de separar en la doble estructura de estado y objeto.<sup>22</sup>

Para dar una idea de lo que entiende por la doble estructura de “estado y objeto”, Scarry compara los actos de “imaginar una flor” y “temer un terremoto”. Señala que “temer un terremoto” tiene dos partes: el objeto contemplado al que se teme y la experiencia íntima de ese miedo. En contraste, sugiere Scarry, “imaginar una flor” tiene como objeto la flor imaginada y viene sin otra experiencia íntima, distinta, del ejercicio de la facultad de imaginar.

Esto puede no ser sorprendente, porque incluso con la percepción (felizmente) verdadera, y no una sensación imaginaria, del aroma del café por las mañanas, uno tiene la experiencia interior del aroma de ese café sin ninguna otra experiencia palpable separada del ejercicio del propio sentido del olfato.

Debo enfatizar que ni siquiera la misma Scarry le dedica mucho tiempo a estas ideas. Para aquellos que no han leído su ensayo en prosa poética, no deseo arruinar su construcción dramática revelando cómo evoluciona desde este tema, ni revelar sus otras sorpresas. Pero ¿podemos nosotros, como una modesta prueba de la afirmación de Scarry, capturar destellos de nuestra *imaginación en acción*? Con esto en mente, regresemos al planteamiento inicial de nuestra historia matemática.

## PROBLEMAS MATEMÁTICOS Y RAÍCES CUADRADAS

Como ya indicamos, las raíces cuadradas aparecen como respuesta incluso para las cuestiones geométricas más simples, y si tu apetito por problemas matemáticos crece, descubrirás, como lo hicieron los algebristas italianos del siglo XVI, que cantidades numéricas más complicadas tales como

$$\sqrt{\sqrt{52} + 2}$$

<sup>22</sup> *Op. cit.*, p. 42.

(la cual resulta ser aproximadamente igual a 3.03) aparecen rutinariamente como *soluciones*.<sup>23</sup> Al leer a estos matemáticos italianos, sólo puedes admirarte por los largos trabalenguas en los cuales se metían para dar rienda suelta a su gusto por los problemas matemáticos, los cuales con frecuencia se disfrazaban de problemas prácticos (¿?):

Un rey envió 128 mil piezas de oro al procónsul que estaba comandando su ejército, para que pudiera contratar 7 mil soldados de infantería y 7 mil de caballería. La proporción del estipendio era tal que 100 piezas de oro podían contratar 18 veces más infantes que jinetes. Un tribuno de los soldados llegó al procónsul con 1 700 infantes y 200 soldados de caballería y le pidió su parte de la paga...<sup>24</sup>

Si el planteamiento marcial de este problema algebraico no es de tu agrado, puedes volcar tu talento a tratar de resolver uno anterior, del siglo XII: el problema 132 del *Bijaganita*, de Bhaskara II:

La raíz cuadrada de la mitad del número de abejas en un enjambre se fue a un macizo de jazmines; así también lo hicieron ocho novenos del enjambre; una hembra está zumbando junto al macho restante, que susurra dentro de un loto, en el cual está confinado, habiendo sido atraído a él por su fragancia durante la noche. Dime, amada mía, el número de abejas.<sup>25</sup>

<sup>23</sup> Ésa es la respuesta al siguiente problema: dado un triángulo cuya área es 3 y cuyos lados tienen longitud  $x - 1$ ,  $x$  y  $x + 1$ , ¿cuánto vale  $x$ ? Aparece en Girolamo Cardano, *Artis magna sive de regulis algebraicis*, 1545. Cito de T. Richard Witmer, ed. y trad., *Cardano: The Great Art*, The MIT Press, 1968, edición a la que me referiré desde ahora como *Ars magna*. También citaré del prefacio a esta obra de Oystein Ores. El problema anterior se plantea y resuelve en la página 193. La notación habitual para las raíces cuadradas, cúbicas, cuartas y demás es  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\sqrt[n]{x}$ , etcétera. Sin embargo, en el caso de la raíz cuadrada, el 2 puede omitirse (es decir, los dos signos  $\sqrt[n]{x}$  y  $\sqrt{x}$  significan ambos raíz cuadrada).

<sup>24</sup> *Ars magna*, problema VII, pp. 44-45. Cardano lo resuelve reduciéndolo al problema de hallar las soluciones de una ecuación cuadrática y obtiene como respuesta que 100 piezas de oro pagarán 7 jinetes o 25 soldados de infantería.

<sup>25</sup> H. T. Colebrooke, *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahme Gupta and Bháscara*, John Murray, 1817, p. 211. Le agradezco a Manjul Bhargava por consultar el texto original de Bhaskara y por asegurarme que este problema tiene esta interpretación sin ambigüedades: si  $n$  es el número de abejas, entonces  $n$  es igual a  $\sqrt{n/2 + 8n/9} + 2$ . Esto lleva a la ecuación  $(n - 72)(2n - 9) = 0$ , que da una sola respuesta posible para el número de abejas en la colmena: son 72.

Sin embargo, inevitablemente, a medida que los matemáticos italianos del siglo XVI permitían tácticas especiales de resolución en problemas particulares para dar lugar a métodos más generales aplicados a problemas más generales, se encontraron empujados con cada vez mayor urgencia en sus cálculos, por el impulso de sus ideas,<sup>26</sup> a hacer uso de cantidades como  $\sqrt{-1}$ . Es especialmente asombroso cómo varios de estos cálculos tuvieron éxito en dar respuestas perfectamente comprensibles a preguntas perfectamente comprensibles, pero sólo cuando trataban durante el camino con cantidades bastante incomprensibles como  $\sqrt{-1}$ . Esto puede ser tan perturbador como descubrir que existe una forma eficaz de viajar desde Brooklyn hasta Boston, pero que en alguna parte, a mitad del viaje, hay que hacer una escala en el inframundo.

Aquí hay un ejemplo concreto del tipo de problemas que parecen ordinarios y que podrían mover a un matemático del siglo XVI a utilizar cantidades como  $\sqrt{-1}$  para hallar su solución (teórica, pero no práctica):

Supongamos que alguien te da la siguiente información sobre el tanque de un acuario: el tanque tiene un volumen de 10 metros cúbicos, es un metro más alto que ancho, y un metro más largo que alto. Encuentra las dimensiones precisas —largo, ancho y alto— del tanque.

He dicho entre paréntesis que cantidades como  $\sqrt{-1}$  se utilizan para hallar soluciones teóricas, no prácticas, de problemas. Para obtener una respuesta aproximada, lo suficientemente buena para toda consideración práctica sobre el cuidado y la alimentación de los peces en el acuario, hay métodos más sencillos, si bien más toscos, e incluso el simple método de ensayo y error funciona bastante bien (el acuario tiene aproximadamente 1.31 metros de ancho). El objetivo aquí será hallar la solución exacta al problema y, mientras lo hacemos, entender la estructura conceptual de la solución. Puedes responder: “¿Que podríamos entender por la *estructura conceptual* de la respuesta a este problema, si, después de todo, es apenas un número?” Espera un poco...

No es que nunca antes se hubieran hallado respuestas confusas a los problemas. Nicolas Chuquet, en su manuscrito de 1484 *Le triparty*, intentó hallar el número que multiplicado por 3 es 4 más su cuadrado, y descubrió que su método lo llevaba a las “respuestas” (que doy en notación moderna)  $3/2 + \sqrt{-1.75}$  y  $3/2 - \sqrt{-1.75}$ . Chuquet concluyó que

<sup>26</sup> Véase, en particular, Rafael Bombelli, *L'Algebra*, ed. de E. Bortolotti y U. Forti, Feltrinelli, 1969.

no existían números que multiplicados por 3 fueran 4 más su cuadrado, porque las respuestas de arriba eran, como él las definió, “imposibles”.<sup>27</sup> Ésta es una conclusión perfectamente válida, dado que Chuquet estaba buscando soluciones con “números ordinarios”. Sin embargo, para hacerte una idea de por qué Chuquet pudo haber sido llevado a pensar en tales expresiones —que consideraba imposibles— como candidatas a soluciones del problema, puedes tratar de elevar al cuadrado  $3/2 + \sqrt{-1.75}$  (es decir, multiplicar esta expresión por sí misma utilizando las “leyes ordinarias de la aritmética”, más el hecho de que el cuadrado de  $\sqrt{-1.75}$  es  $-1.75 = -7/4$ ), sumando luego 4 al resultado, y viendo si obtienes o no que 3 veces  $3/2 + \sqrt{-1.75}$  es la respuesta.<sup>28</sup>

En contraste con la manera en que  $\sqrt{-1.75}$  apareció como una solución posible, pero descartada, del problema de Chuquet, el elemento novedoso en cómo se involucraron los primeros matemáticos italianos con cosas como  $\sqrt{-1.75}$  es que dichos matemáticos estaban trabajando en problemas que tenían soluciones numéricas ordinarias —es decir, números reales— perfectamente posibles, pero sus métodos, de vez en cuando, implicaban manejar números como  $\sqrt{-1.75}$  durante el proceso.

### ¿QUÉ ES UN PROBLEMA MATEMÁTICO?

Los problemas y las preguntas son cosas distintas. De vez en cuando hacemos preguntas con la seguridad de que la respuesta nos será dada con facilidad: “¿Quieres más pastel?” Pero planteamos (arrojamos) problemas a ser resueltos sólo si esperamos que se requiera cierto trabajo mental para dar la respuesta.

<sup>27</sup>Véase la discusión del manuscrito de Chuquet en Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Open Court, 1929, vol. 2, p. 126, ¶ 495. En el capítulo 2 vamos a repasar la *fórmula de la cuadrática*, de donde podrás ver cómo Chuquet pudo haber llegado a una respuesta “imposible” para su problema.

<sup>28</sup>Elevar al cuadrado  $3/2 + \sqrt{-7/4}$  (o sea multiplicarlo por sí mismo de acuerdo con “las leyes usuales de la aritmética”) da una suma de cuatro términos:

$$\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{-7}{4}}\right) \times \left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{-7}{4}}\right) = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{-7}{4}} + \frac{3}{2} \times \sqrt{\frac{-7}{4}} + \frac{-7}{4},$$

que se simplifica como  $1/2 + 3\sqrt{-7/4}$ . La “ley usual de la aritmética” que utilizamos para efectuar este cálculo,  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ , es una variante de una cosa llamada la *ley distributiva*, que será objeto de nuestra atención en el capítulo 2.

Podemos clasificar las categorías de preguntas con respuesta directa, como Aristóteles lo hace en su *Metafísica*: “¿Qué?”, “¿Cómo?”, “¿Cuánto?”, “¿Por qué?” Pero los *problemas* son una historia diferente: no parecen entregarse fácilmente a una simple categorización. Su planteamiento puede requerir mucho más ingenio:

How hadde this cherl ymaginacioun  
To shewe swich a probleme to the frere?,

pregunta el señor de la mansión en “El cuento del alguacil”, de los *Cuentos de Canterbury*, de Geoffrey Chaucer.<sup>29</sup> Los *problemas* son la dificultad principal de las aulas, y la difícil y melancólica situación de los estudiantes es que se hallan doblados sobre sus pupitres trabajando en problemas planteados por otros, y no por ellos mismos.

Los mejores problemas matemáticos son *incitaciones*: hay una ligera ironía detrás de ellos. Quien plantea el problema por lo general presenta una tarea bien precisa: ¡*Resuelve esto!* Una ecuación, tal vez: sólo resuélvela. Pero si el problema es realmente bueno, una solución no es más que una invitación a interactuar con sus elementos en un nivel que no habías alcanzado antes. Resolver el problema te lleva a un nivel más profundo de cuestionamientos. El problema mismo es una invitación a extender tu imaginación. Esto es cierto para los buenos problemas escolares pero también para varios de los problemas matemáticos más famosos y venerados —tal vez para todos ellos—. Por ejemplo, está la conjetura de Poincaré, uno de los grandes objetivos aún no alcanzados de la geometría tridimensional (que se explica en el apéndice 2 a este capítulo). Dicha conjetura es una afirmación precisa sobre la caracterización del espacio tridimensional, y los matemáticos vehementemente quieren saber: “¿Es cierta? ¿Es falsa?” Pero el ímpetu detrás del problema es mucho mayor que determinar si es cierta o falsa. Trabajar en él ofrece una posibilidad de extender nuestra intuición geométrica tridimensional. Ahora bien, podrías decir que todos conocemos el espacio de tres dimensiones: nos ponemos y quitamos abrigos, atamos cosas con nudos, bailamos, exploramos cuevas y montañas, pero la conjetura de Poincaré nos dice que hay más por imaginar, que hay todavía formas en las cuales nuestra intuición tridimensional puede refinarse, y nos desafía a que lo hagamos.

<sup>29</sup> “¿Cómo es que este tipo tuvo la imaginación de poner al fraile en este predicamento?”, 6a ed., trad. de P. Guardia Massó, Cátedra, 2001, p. 258.