0. Cero

El cero es el primero de los dígitos, los diez símbolos con los que podemos representar una infinidad de números. También es el primero de esos números que podemos representar. Pero el cero, primer dígito, fue el último que se inventó; primer número, fue el último que se descubrió.

Estos dos hechos —la invención y el descubrimiento del cero—, aunque fueron ambos muy tardíos en la historia de los números, no sucedieron al mismo tiempo. El cero se inventó siglos antes de ser descubierto.

En la época del nacimiento de Cristo, la idea del cero como símbolo sólo se les había ocurrido a los babilonios, y había desaparecido con ellos. La idea del cero como número no se le había ocurrido a nadie. El problema de cómo escribir números sin tener que usar un símbolo distinto para cada uno se había resuelto de manera similar en todas las grandes civilizaciones. Los egipcios emplearon dibujos o jeroglíficos; los griegos, las letras de su abecedario; los romanos, las líneas sencillas que vemos talladas en las piedras angulares de sus edificios. Pero todos agruparon los números de manera que los mismos símbolos pudieran usarse una y otra vez. Esto hacía posible escribir todos los números, aunque no de una forma que permitiera manipularlos en operaciones aritméticas, por simples que éstas fueran. Quien haya tratado de multiplicar números romanos entenderá por qué los romanos abandonaban la uve, la equis, la ce y la eme, y tomaban un ábaco, cuando tenían que resolver un problema aritmético. Los egipcios y los griegos hacían lo mismo. Y sin embargo a nadie parece habérsele ocurrido que justo en las cuentas del ábaco estaba el secreto acerca del método más eficiente de representación numérica que se habría de desarrollar en el mundo.

Aunque obtuvo varias formas y nombres en civilizaciones diversas, en todas ellas el ábaco consistía básicamente en un marco o tablero dividido en columnas paralelas. Cada una tenía el valor de una potencia de diez; el número de veces que dicha potencia aparecía en la representación de un número determinado se indicaba mediante cuentas. Todas las cuentas eran idénticas y todas representaban una unidad. El valor de dicha unidad, sin embargo, variaba con cada columna. Una cuenta en la primera columna valía 1 (10^0); en la segunda, 10 (10^1); en

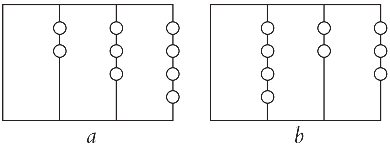

FIGURA 1. Cómo se representan los números en un ábaco: *a*] 234 y *b*] 423.

la tercera, 100 (10^2), y así sucesivamente. Por ello, la vida incierta de un favorito en la corte de un tirano se comparaba a veces con la cuenta de un ábaco, "que hoy vale mucho y mañana poco".

Los números que los romanos escribían como CCXXXIV (234) y CDXXIII (423) se distinguían fácilmente en el ábaco, como se ve en la figura 1.

Hoy nos damos cuenta inmediatamente del parecido que existe entre la forma como se representaban los números en un ábaco y la manera como lo hacemos hoy por escrito. En lugar de nueve cuentas, utilizamos nueve símbolos distintos para representar el total de cuentas de una columna, y un décimo símbolo para indicar que la columna está vacía. El orden de esos diez símbolos, que llamamos dígitos, nos dice exactamente lo mismo que las cuentas: 234 nos indica dos veces 100, tres veces 10 y cuatro veces 1, mientras que 423 significa cuatro veces 100, dos veces 10 y tres veces 1.

En resumen, la notación *posicional* moderna, en la que cada dígito cambia de valor según la posición que ocupe en la representación del número, no es más que una forma permanente de la notación del ábaco. Para copiar un número del ábaco al papel sólo hacen falta diez símbolos, pues sólo caben diez cantidades posibles en una columna: una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho o nueve cuentas, o ninguna. La columna puede permanecer vacía, y el décimo símbolo necesariamente tiene que representar esa columna vacía para que se puedan distinguir entre sí diversos números del ábaco. Sin ese símbolo, los ejemplos de la figura 2 valdrían todos lo mismo: 234. Con él, podemos identificarlos fácilmente como 2 340 (*a*), 2 034 (*b*) y 2 304 (*c*).

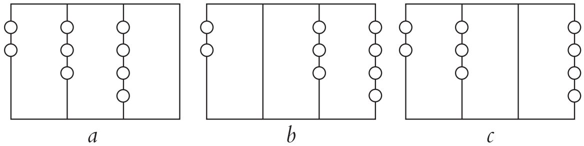

FIGURA 2. Tres números en el ábaco. Sin el cero, sería imposible distinguirlos por escrito.

Uno pensaría que la primera vez que alguien quiso anotar una cantidad obtenida en el ábaco debería haber puesto automáticamente un símbolo cualquiera (una raya, un punto, un círculo) para representar esa columna vacía que hoy representamos con 0. Pero durante miles de años, nadie lo hizo.

Pitágoras no lo hizo.

Ni Euclides.

Ni Arquímedes.

El gran misterio del cero es cómo se le escapó hasta a los griegos, con excepción de sus astrónomos.

Como el lector pronto se dará cuenta, es difícil, si no imposible, hablar de números sin hablar de los griegos. El inglés G. H. Hardy (1877-1947) expresó así el respeto que los matemáticos de hoy sienten por sus antiguos "contemporáneos": "Las matemáticas orientales pueden ser una curiosidad interesante, pero las griegas son matemáticas de verdad. Como me dijo alguna vez Littlewood, 'Los griegos no son estudiantes listos ni candidatos a recibir becas, sino *colegas de otra universidad*'."[1]

Resulta más que curioso que los griegos no hayan reconocido el cero, o la nada, como número. Fueron los primeros en interesarse por los números simplemente porque son interesantes, y heredaron a la teoría de números varias preguntas que siguen sin respuesta. Sin embargo, lo que les preocupaba era descubrir los secretos de los números, no utilizarlos. Miraban los números a través de la lente de la geometría, y ésa puede ser una razón por la cual la idea del cero se les escapó. Más aún: aunque buena parte de la teoría de números se las puede arreglar muy bien sin el cero, resulta terriblemente engorroso hacer cuentas sin él. Los grandes matemáticos griegos, ocupados en la reflexión sobre esos números tan interesantes, consideraban que hacer cuentas era una labor propia de esclavos y se la dejaban a ellos.

Fueron los indios quienes nos dieron el cero y, con él, un sistema práctico de notación aritmética. Por allá de los primeros siglos de la era cristiana, un indio desconocido que quería registrar en forma permanente el resultado de su ábaco inventó un símbolo —un punto que llamó *sunya*— para indicar una columna vacía.

De esa manera, después de todos los demás dígitos, nació el primero de ellos: el cero.

[1] Se refiere a J. E. Littlewood (1885-1977). La cita es del libro *A Mathematician's Apology* (1940). [Hay traducción al castellano: *Autojustificación de un matemático,* Barcelona, Ariel, 1981. N. del e.]

Se ha dicho que la filosofía y la religión indias prepararon el camino para la invención de un símbolo que representara la nada, el vacío. Pero hay que entender que el punto *sunya* que los indios crearon no era el número cero: era simplemente un artificio mecánico para indicar un espacio vacío. Precisamente eso significaba la palabra *sunya:* "vacío". En la India se siguen empleando el mismo vocablo y el mismo símbolo para denotar la incógnita de una ecuación (lo que normalmente representamos con x), pues un espacio se considera vacío mientras no se lo ocupe con el número indicado.

De esa manera, el *sunya* significó la invención de un símbolo, mas no el descubrimiento de un número. Por lo pronto, los árabes llevaron a Europa la nueva notación india, que por ello se llamó desde entonces notación "arábiga". A pesar de que era inmensamente superior, no tuvo aceptación inmediata. En 1300 se prohibió usar los nuevos números en documentos comerciales, pues se pensaba que eran más fáciles de alterar que los números romanos. Los mercaderes reconocieron la utilidad de la nueva notación, mientras que los universitarios más conservadores se aferraban a los números romanos y el ábaco. Los nuevos números no se establecieron en todo el continente sino hasta 1600.

Todos se dieron cuenta de que la nueva notación era revolucionaria por su empleo del punto (*sifr,* en árabe) para representar la columna vacía. El sistema entero habria de conocerse por el nombre de este símbolo; así, la palabra *cifra* pasó a significar no sólo *cero,* sino cualquiera de los dígitos, y el verbo *cifrar* se usó como sinónimo de *calcular.* (*Cero* llegó después, a través del francés y el italiano.) Pero el *sifr,* como el *sunya,* era simplemente el símbolo de la columna vacía, no un número.

Aún hoy, aunque usamos constantemente el símbolo 0, no siempre pensamos en él como número. En los teclados de las máquinas de escribir y las computadoras, igual que en los teléfonos (antes en sus discos, hoy en sus teclados), lo incluimos entre los otros dígitos, pero lo colocamos después del 9. Ya que su valor no es mayor que 9, es obvio que está ahí como símbolo, no como número.

Esto no debería sorprendernos, pues el cero es el único dígito que normalmente no usamos como número. Si intentas resolver los problemas planteados en el recuadro 1, descubrirás que te resulta mucho más fácil manejar el cero como símbolo que como número. El símbolo es el cero que conoces. Curiosamente, la aritmética posicional, que necesita del símbolo cero para existir, suele funcionar muy bien sin el número cero.

Siglos después de la invención del *sunya* como símbolo para representar la columna vacía de un ábaco, la gente seguía tropezándose en el

RECUADRO 1. ¿Entendemos el cero?

Cero como símbolo	Cero como número
$1 + 10 =$	$1 + 0 =$
$10 + 1 =$	$0 + 1 =$
$1 - 10 =$	$1 - 0 =$
$10 - 1 =$	$0 - 1 =$
$1 \times 10 =$	$1 \times 0 =$
$10 \times 1 =$	$0 \times 1 =$
$10 \times 10 =$	$0 \times 0 =$
$10 \div 1 =$	$0 \div 1 =$
$1 \div 10 =$	$1 \div 0 =$
$10 \div 10 =$	$0 \div 0 =$

Soluciones

Como número: 1, 1, 1, −1, 0, 0, 0, 0, imposible, indeterminado.

Como símbolo: 11, 11, −9, 9, 10, 10, 100, 10, 1/10, 1.

camino rumbo al dominio del cero entendido como un número que puede sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse como los demás. Para el estudioso que hoy examina antiguos documentos matemáticos, la prueba de ese dominio es siempre la misma. El cero parece haber ocasionado pocos problemas en la resta, la suma y aun la multiplicación. Es la división de cero y por cero la que nos muestra si alguien entendió realmente nuestro curioso numerito. Las operaciones problemáticas son similares a las tres últimas del recuadro 1 (quizá las mismas que tuviste dificultades para resolver).

$$0 \div 1 = ?$$

La fracción 0/1, que es otra manera de expresar esta división, tiene sentido matemáticamente. Todos los números dividen a cero; eso lo vuelve único entre ellos. (En teoría de números, se considera que un número "divide" a otro sólo si el resultado obtenido es un número entero.) No importa qué número multipliquemos por cero, la respuesta es siempre la misma: cero. Como $0 \times 1 = 0$, entonces $0 \div 1 = 0$. No importa por qué número dividamos cero, el resultado siempre será el mismo: cero.

$$1 \div 0 = ?$$

Por el contrario, la expresión 1/0 no tiene sentido matemáticamente. Cero no divide a ningún número salvo a sí mismo, ni siquiera como denominador de una fracción. Por ello, igual que por el hecho de que todos los números lo dividan, es único. La expresión 1/0 no tiene sentido por la misma razón que 0/1 sí lo tiene. No importa qué número multipliquemos por cero, el resultado siempre será cero. Una división, sin embargo, indica que un número (el cociente), al multiplicarse por otro (el denominador), producirá el número dividido (el numerador). Si hubiera una solución para la operación $1 \div 0$, o un valor para la expresión 1/0, tendría que ser un número tal que, multiplicado por cero, diera como resultado uno. Pero ya establecimos que *todo* número multiplicado por cero produce cero. Por tanto, no podemos dividir uno (ni ningún otro número) por cero.

$$0 \div 0 = ?$$

No se puede decir que la expresión 0/0 tenga o no sentido matemáticamente. Es *indeterminada.* Podemos dividir cero por sí mismo, pero no hay manera de determinar el valor del resultado. Como todo número multiplicado por cero produce cero, cero dividido por cero puede dar como resultado cualquier número. El resultado de la división puede ser cero, ya que $0 \times 0 = 0$, pero también puede ser uno, pues $0 \times 1 = 0$, y dos, pues $0 \times 2 = 0$, y así sucesivamente. El cero es favorito de los aficionados a una rama del insulto que podemos llamar "invectiva matemática". Un ejemplo, tomado de un periódico, es la frase "una mísera nada dividida por nada". Matemáticamente, se trata de un insulto menos definitivo de lo que su autor sin duda quiso.

Las últimas expresiones que hemos empleado *(tener sentido, indeterminado)* pueden resultar más claras mediante una comparación. Se dice que una división dada tiene sentido matemáticamente sólo si representa un valor específico que pueda obtenerse resolviendo la operación. Puede compararse con un título empleado para identificar específicamente a una persona que no nombramos; "el presidente de México", por ejemplo. Generalmente, cuando usamos ese título nos referimos a una persona de manera tan específica como si hubiéramos empleado su nombre. De manera similar, la expresión 0/1 (es decir $0 \div 1$) se refiere a un valor específico: 0. No puede representar otro valor, de la misma manera que 10/1 no puede representar otro valor sino 10.

Por otra parte, una división dada *no* tiene sentido matemáticamente si no puede tener ningún valor. De la misma manera, un título puede no tener sentido, como "el rey de México". La expresión 1/0 (es decir

$1 \div 0$) no tiene sentido porque no se puede dividir uno por cero; por ello, la expresión no representa ningún valor. (No representar *ningún valor* es muy distinto de representar cero.)

La expresión 0/0 (es decir $0 \div 0$) también carece de sentido, pero en una forma muy distinta. Es como el título "el senador de México", que no sirve para identificar a nadie a menos de que el contexto en el que se usa especifique a cuál de los 128 senadores se refiere. La expresión 0/0 puede referirse a muchos más valores que 128. Puede tener cualquier valor numérico que deseemos darle, dado que todo número multiplicado por cero da cero. La expresión 0/0 no significa nada, ya que puede significarlo todo. Los matemáticos dicen de ella, más técnicamente, que es *indeterminada,* y les tomó siglos darse cuenta de ello. Sólo entonces lograron dominar el número cero.

Para entender el significado especial que tiene el cero entre los números, debemos examinar lo que se conoce como números enteros. Cuando escribimos los enteros en orden, los números positivos (que cuentan las cosas "presentes", que están ahí) se extienden indefinidamente hacia la derecha; los negativos (que cuentan las cosas "ausentes"), hacia la izquierda. Se trata de un arreglo que utilizamos en los termómetros: los números positivos están "sobre" cero; los negativos, "bajo" cero:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$$

En este arreglo de los enteros negativos y positivos, cada par de números consecutivos debe guardar entre sí la misma distancia que todos los demás pares. Ese espacio regular es la esencia de los enteros: -1 está a la misma distancia de -2 que $+1$ de $+2$ o que $+2$ de $+3$. Pero sólo es posible mantener dicha regularidad si se incluye el cero entre los enteros. Sin él, la distancia entre -1 y $+1$ sería el doble de la distancia entre cualquier otro par de números consecutivos. Obviamente, entonces, -1 y $+1$ no son consecutivos: 0 se encuentra entre ellos.

A diferencia de lo que ocurre con la escala que acabamos de mencionar, en la medida cristiana del tiempo el cero no indica un número, sino un punto. Por ello, un problema con grados de temperatura produce un resultado distinto que uno con años. Si la temperatura es de 5° bajo cero en la mañana y sube 8° durante el día, entonces llega a 3° sobre cero. Pero un niño nacido el 1 de enero del año 5 a. C. no cumplirá ocho años sino hasta el año 4 d. C. La diferencia entre los resultados de ambos problemas, que aparentemente tienen términos idénticos, queda clara si comparamos la escala de la temperatura con la del tiempo:

8 grados

$$\overbrace{5^\circ \quad 4^\circ \quad 3^\circ \quad 2^\circ \quad 1^\circ}^{-} \quad 0^\circ \quad \overbrace{1^\circ \quad 2^\circ \quad 3^\circ}^{+}$$

$$\underbrace{5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1}_{\text{a. C.}} \quad \underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{\text{d. C.}}$$

8 años

Esta diferencia ocasionó un gran alboroto en el mundo académico en 1930. La celebración de los 2 mil años del nacimiento de Virgilio estaba en su apogeo cuando a un aguafiestas se le ocurrió señalar que, como no hubo año cero, el poeta (nacido en 70 a. C.) no cumpliría dicho aniversario sino hasta 1931. Los académicos, que deberían haber hecho las cosas con más cuidado, habían aplicado un proceso matemático que depende de que el cero sea un número, sobre una escala en la que el cero *no* es un número. Algo similar ocurrió cuando el 1 de enero de 2000 se celebró el principio de un milenio que en realidad comenzó el 1 de enero de 2001.

El cero es único entre los enteros porque no es positivo ni negativo. Aunque usemos todos los enteros cuando hacemos cuentas, pensamos en los números mayores que cero cuando hablamos de "los números". (Todavía en el siglo XII, el matemático indio Bhaskara daba $x = 50$ y $x = -5$ como raíces de la ecuación $x^2 - 45x = 250$, pero advertía: "En este caso, no debemos tomar el segundo valor, pues es inadecuado: la gente no acepta las raíces negativas.") Incluso llamamos a los números mayores que cero números *naturales,* aunque el que sean más naturales que cualquier otro número es discutible. Se trata de los números que usamos para contar, y ésa nos parece la actividad normal para la que necesitamos los números. No pensamos en el cero como número natural porque a casi nadie le parece natural "contar" con "nada". Sin embargo, se ha ido volviendo más natural a medida que más y más gente aprende a usar computadoras. Para la computadora no hay duda: el cero es un número. No sólo 0 precede a 1 en el teclado numérico que se encuentra en el lado derecho de la computadora —como debe— sino que, al programar aun las cosas más cotidianas como las mensualidades del coche o de la casa, lo que normalmente consideramos como el "primer" año debe tratarse como el año cero en lugar de uno.

A diferencia de los números negativos, es lógico considerar al cero con los llamados números naturales, pues responde la misma gran pregunta que responden todos los números con los que contamos, y lo hace exactamente de la misma manera. La pregunta es, simplemente: "¿Cuántos?":

- ¿Cuántas personas hay en la habitación donde lees este libro?
- ¿Cuántos elefantes hay en la habitación donde lees este libro?

La respuesta a la primera pregunta es: por lo menos una, quizá dos o tres; pero lo más probable es que la respuesta a la segunda sea cero. Cero es un número, como lo son uno, dos y tres.

Pero el lector se podrá preguntar: ¿qué clase de número es?

Un número es una abstracción, el resultado de reconocer el hecho de que ciertos grupos de cosas pueden tener algo en común aunque sus elementos no tengan *nada* en común. Existe una semejanza entre dos montañas y dos aves, aunque las montañas y las aves no sean semejantes entre sí; es una semejanza que comparten con los pares de cualquier cosa. Aunque esto pueda parecernos obvio, no lo era para nuestros antepasados. Ellos reconocían la diferencia entre un faisán y dos, entre un día y dos; sin embargo, como señaló Bertrand Russell (1872-1970), "seguramente pasó mucho tiempo antes de que descubrieran que una pareja de faisanes y un par de días eran dos manifestaciones del número dos".

Lo que se descubrió, matemáticamente hablando, fue que el número dos es la propiedad común a todos los conjuntos que contienen un par. No importa que el conjunto contenga dos personas, elefantes, moscas o montañas, o incluso dos objetos completamente diferentes entre sí: comparte el número dos con todos los demás conjuntos que contengan un par de algo.

Cuando decimos que uno, dos y tres son números, queremos decir que uno es el número de todos los conjuntos que contienen un solo elemento; que dos es el número de los conjuntos que contienen un par; que tres es el de los conjuntos que contienen un trío. Como las posibilidades de lo que estos conjuntos puedan contener no tienen fin, decimos que son infinitos.

También hay un conjunto comparable con todos los demás, que corresponde al cero. Es el conjunto que no contiene personas, elefantes, moscas ni montañas. En otras palabras: el conjunto vacío. De la misma manera que uno, dos y tres son los números de los conjuntos de uno, dos y tres elementos, respectivamente, cero es el número del conjunto vacío. Sin embargo, existe una diferencia entre el conjunto de cero y todos los demás, que no tiene nada que ver con la diferencia en el número de sus elementos. Mientras que todos los demás números representan un número infinito de conjuntos, el cero representa sólo uno: el conjunto vacío. No importa si está vacío de personas, elefantes, moscas o montañas: sigue siendo el mismo, y sólo hay uno.

Por cosas como ésta el cero es un número muy interesante entre una infinidad de números interesantes. Cada número natural es, por supuesto, único: dos no es tres, tres es distinto de cuatro, cuatro no es igual a cinco ni a ningún otro número. Pero el carácter único del cero es más general que el de todos los demás números, y por ello más significativo e interesante:

- El cero es el único número que puede dividirse por cualquier otro número.
- El cero es el único número que no divide a ningún otro número.

Debido a estas dos características, el cero es casi invariablemente un "caso especial" entre los números, como veremos en varias ocasiones a lo largo de las páginas que siguen. El cero se parece lo suficiente a los demás números naturales como para que lo consideremos uno de ellos; pero también es suficientemente distinto de ellos como para ser, por derecho propio, un número muy interesante: el primero y el último de los dígitos.

Un problema

Los dígitos pueden ordenarse de muy diversas maneras. En este capítulo mencionamos dos: en la primera, el 0 sigue al 9 como símbolo; en la segunda, mucho menos común, precede al 1 como número. He aquí otro arreglo en el que 0 es el primero de los dígitos; a muchos matemáticos les cuesta trabajo identificar cuál es la lógica que lo rige.

0 5 4 2 9 8 6 7 3 1

Solución

Los dígitos están dispuestos en orden alfabético. Las secretarias suelen solucionar este problema mucho más rápido que los matemáticos. Una variante consiste en acomodar los dígitos según su nombre en una lengua extranjera.